

1992年湖南高考文科数学真题及答案

一、选择题（共18小题，每小题3分，满分54分）

1. (3分) $\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$ 的值是 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

2. (3分) 已知椭圆 $\sqrt{1+\tan^2 \alpha}$ 上的一点 P 到椭圆一个焦点的距离为 3，则 P 到另一焦点距离为 ()

- A. 9 B. 7 C. 5 D. 3

3. (3分) 如果函数 $y=\sin(\omega x)\cos(\omega x)$ 的最小正周期是 4π ，那么常数 ω 为 ()

- A. 4 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

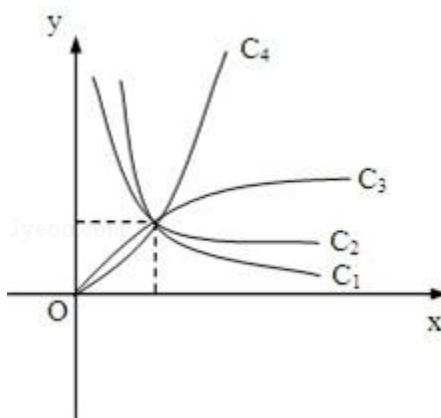
4. (3分) 在 $(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^8$ 的二项展开式中，常数项等于 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. -7 C. 7 D. $-\frac{3}{2}$

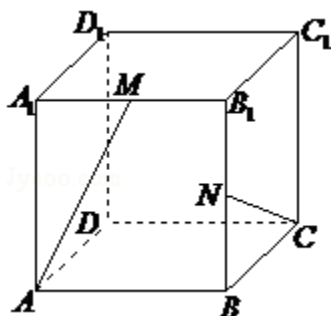
5. (3分) 已知轴截面是正方形的圆柱的高与球的直径相等，则圆柱的全面积与球的表面积之比是 ()

- A. 6:5 B. 5:4 C. 4:3 D. 3:2

6. (3分) 图中曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限的图象. 已知 n 取 $\pm 2, \pm \frac{1}{2}$ 四个值，则相应



于曲线 c_1, c_2, c_3, c_4 的 n 依次为 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

15. (3分) 已知复数 z 的模为 2, 则 $|z - i|$ 的最大值为 ()

- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. 3

16. (3分) 函数 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的反函数 ()

- A. 是奇函数, 它在 $(0, +\infty)$ 上是减函数
 B. 是偶函数, 它在 $(0, +\infty)$ 上是减函数
 C. 是奇函数, 它在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
 D. 是偶函数, 它在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

17. (3分) 如果函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t) = f(2-t)$, 那么 ()

- A. $f(2) < f(1)$ B. $f(1) < f(2)$ C. $f(2) < f(4)$ D. $f(4) < f(2)$
 $< f(4)$ $< f(4)$ $< f(1)$ $< f(1)$

18. (3分) 长方体的全面积为 11, 十二条棱长度之和为 24, 则这个长方体的一条对角线长为 ()

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{14}$ C. 5 D. 6

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

19. (3分) (2009·金山区二模) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n} \right]$ 的值为

_____.

20. (3分) 已知 α 在第三象限且 $\tan \alpha = 2$, 则 $\cos \alpha$ 的值是

_____.

21. (3分) 方程 $\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1}$ 的解是_____.

22. (3分) 设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S, 其中由 3 个元素组成的子集数为 T, 则 $\frac{T}{S}$ 的值为_____.

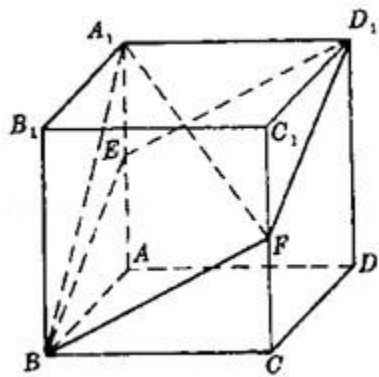
23. (3分) 焦点为 $F_1(-2, 0)$ 和 $F_2(6, 0)$, 离心率为 2 的双曲线的方程是_____.

三、解答题 (共 5 小题, 满分 51 分)

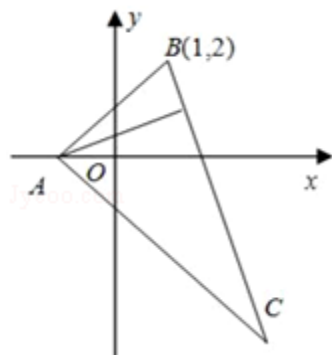
24. (9分) 求 $\sin^2 20^\circ + \cos^2 80^\circ + \sin 20^\circ \cos 80^\circ$ 的值.

25. (10分) 设 $z \in \mathbb{C}$, 解方程 $z - 2|z| = -7 + 4i$.

26. (10分) 如图, 已知 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体, E、F 分别为棱 AA_1 与 CC_1 的中点, 求四棱锥的 $A_1 - EBF D_1$ 的体积.



27. (10分) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 BC 边上的高所在直线的方程为 $x - 2y + 1 = 0$, $\angle A$ 的平分线所在直线的方程为 $y = 0$. 若点 B 的坐标为 $(1, 2)$, 求点 C 的坐标.



28. (12分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_3 = 12$, $S_{12} > 0$, $S_{13} < 0$.

(1) 求公差 d 的取值范围.

(2) 指出 S_1, S_2, \dots, S_{12} 中哪一个值最大, 并说明理由.

参考答案

一、选择题（共 18 小题，每小题 3 分，满分 54 分）

1. (3 分) $\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$ 的值是 ()
- A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

考点：对数的运算性质.

分析：根据 , 从而得到答案.

解答：

$$\text{解：} \frac{\log_8 9}{\log_2 3} = \frac{\frac{2}{3} \log_2 3}{\log_2 3} = \frac{2}{3}.$$

故选 A.

点评：本题考查对数的运算性质.

2. (3 分) 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上的一点 P 到椭圆一个焦点的距离为 3，则 P 到另一焦点距离为 ()
- A. 9 B. 7 C. 5 D. 3

考点：椭圆的简单性质；椭圆的定义.

专题：综合题.

分析：由椭圆方程找出 a 的值，根据椭圆的定义可知椭圆上的点到两焦点的距离之和为常数 2a，把 a 可求出常数的值得到 P 到两焦点的距离之和，由 P 到一个焦点的距离为 3，求出 P 到另一焦点可.

解答：

$$\text{解：由椭圆 } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \text{ 得 } a=5,$$

则 $2a=10$ ，且点 P 到椭圆一焦点的距离为 3，

由定义得点 P 到另一焦点的距离为 $2a - 3 = 10 - 3 = 7$.

故选 B

点评：此题考查学生掌握椭圆的定义及简单的性质，是一道中档题.

3. (3 分) 如果函数 $y = \sin(\omega x) \cos(\omega x)$ 的最小正周期是 4π ，那么常数 ω 为 ()
- A. 4 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

考点：二倍角的正弦.

分析：逆用二倍角正弦公式，得到 $y = A \sin(\omega x + \phi) + b$ 的形式，再利用正弦周期公式和周期是求出 ω

解答：

$$\text{解：} \because y = \sin(\omega x) \cos(\omega x) = \frac{1}{2} \sin(2\omega x),$$

$$\therefore T = 2\pi \div 2\omega = 4\pi$$

$$\therefore \omega = \frac{1}{4},$$

故选 D

点评：二倍角公式是高考中常考到的知识点，特别是余弦角的二倍角公式，对它们正用、逆用、变形本题还考的周期的公式求法，记住公式，是解题的关键，注意 ω 的正负，要加绝对值.

4. (3分) 在 $(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^8$ 的二项展开式中，常数项等于 ()

A. $\frac{3}{2}$

B. -7

C. 7

D. $-\frac{3}{2}$

考点：二项式定理.

专题：计算题.

分析：利用二项展开式的通项公式求出展开式的通项，令 x 的指数为 0，求出 r 代入通项求出常数项.

解答：

解： $(\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^8$ 的二项展开式的通项公式为

$$T_{r+1} = C_8^r (\frac{x}{2})^{8-r} \cdot (-x^{-\frac{1}{3}})^r$$

$$= \frac{(-1)^r C_8^r}{2^{8-r}} \cdot x^{8-\frac{4}{3}r}$$

$$\text{令 } 8 - \frac{4}{3}r = 0 \text{ 得 } r=6, \text{ 所以 } r=6 \text{ 时, 得二项展开式的常数项为 } T_7 = \frac{(-1)^6 C_8^6}{2^{8-6}} = 7.$$

故选 C.

点评：本题考查利用二项展开式的通项公式解决二项展开式的特定项问题.

5. (3分) 已知轴截面是正方形的圆柱的高与球的直径相等，则圆柱的全面积与球的表面积之比是 ()

A. 6: 5

B. 5: 4

C. 4: 3

D. 3: 2

考点：旋转体（圆柱、圆锥、圆台）.

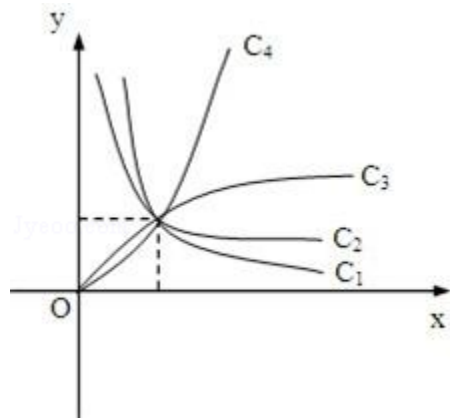
专题：计算题.

分析：设圆柱的底面半径，求出圆柱的全面积以及球的表面积，即可推出结果.

解答： 解：设圆柱的底面半径为 r ，则圆柱的全面积是： $2\pi r^2 + 2r\pi \times 2r = 6\pi r^2$
 球的全面积是： $4\pi r^2$ ，所以圆柱的全面积与球的表面积之比： $3:2$
 故选 D.

点评： 本题考查旋转体的表面积，是基础题.

6. (3分) 图中曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限的图象. 已知 n 取 $\pm 2, \pm \frac{1}{2}$ 四个值, 则相应



于曲线 c_1, c_2, c_3, c_4 的 n 依次为 ()

- A. $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$ B. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2, 2$ C. $-\frac{1}{2}, -2, 2, \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}, 2, -2, -\frac{1}{2}$

考点： 幂函数的图像.

专题： 阅读型.

分析：

由题中条件：“ n 取 $\pm 2, \pm \frac{1}{2}$ 四个值”，依据幂函数 $y=x^n$ 的性质，在第一象限内的图象特征可

解答： 根据幂函数 $y=x^n$ 的性质，在第一象限内的图象， n 越大，递增速度越快，

故曲线 c_1 的 $n = -2$ ，曲线 c_2 的 $n = -\frac{1}{2}$ ， c_3 的 $n = \frac{1}{2}$ ，

曲线 c_4 的 $n = 2$ ，故依次填 $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$.

故选 A.

点评： 幂函数是重要的基本初等函数模型之一. 学习幂函数重点是掌握幂函数的图形特征，即图象与函数的图象、性质，把握幂函数的关键点 $(1, 1)$ 和利用直线 $y=x$ 来刻画其它幂函数在第一象限

7. (3分) 若 $\log_a 2 < \log_b 2 < 0$ ，则 ()

- A. $0 < a < b < 1$ B. $0 < b < a < 1$ C. $a > b > 1$ D. $b > a > 1$

考点： 对数函数图象与性质的综合应用.

专题： 计算题.

分析：

利用对数的换底公式，将题中条件：“ $\log_a 2 < \log_b 2 < 0$ ，”转化成同底数对数进行比较即可.

解答： 解： $\because \log_a 2 < \log_b 2 < 0$ ，
由对数换底公式得：

$$\therefore \frac{1}{\log_2 a} < \frac{1}{\log_2 b} < 0$$

$$\therefore 0 > \log_2 a > \log_2 b$$

\therefore 根据对数的性质得：

$$\therefore 0 < b < a < 1.$$

故选 B.

点评： 本题主要考查对数函数的性质，对数函数是许多知识的交汇点，是历年高考的必考内容，在高考中：定义域、值域、图象、对数方程、对数不等式、对数函数的主要性质（单调性等）及这些性质的运用.

8. (3分) 原点关于直线 $8x+6y=25$ 的对称点坐标为 ()

- A. $(2, \frac{3}{2})$ B. $(\frac{25}{8}, \frac{25}{6})$ C. (3, 4) D. (4, 3)

考点： 中点坐标公式.

专题： 综合题.

分析： 设出原点与已知直线的对称点 A 的坐标 (a, b)，然后根据已知直线是线段 AO 的垂直平分线，斜率为 -1 且 AO 的中点在已知直线上分别列出两个关于 a 与 b 的方程，联立两个方程即可求出 a, b 写出 A 的坐标即可.

解答：

解： 设原点关于直线 $8x+6y=25$ 的对称点坐标为 A (a, b)，直线 $8x+6y=25$ 的斜率 $k = -\frac{4}{3}$ ，

因为直线 OA 与已知直线垂直，所以 $k_{OA} = \frac{3}{4} = \frac{b}{a}$ ，即 $3a=4b$ ①；

且 AO 的中点 B 在已知直线上， $B(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ ，代入直线 $8x+6y=25$ 得： $4a+3b=25$ ②，
联立①②解得： $a=4$ ， $b=3$ 。所以 A 的坐标为 (4, 3)。

故选 D.

点评： 此题考查学生掌握两直线垂直时斜率所满足的关系，利用运用中点坐标公式化简求值，是一道

9. (3分) 在四棱锥的四个侧面中，直角三角形最多可有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

考点： 棱锥的结构特征.

专题： 作图题.

分析： 借助长方体的一个顶点画出图形，不难解答本题.

解答： 解：如图底面是矩形，一条侧棱垂直底面，那么它的四个侧面都是直角三角形。故选项 D.



点评： 本题考查棱锥的结构特征，考查空间想象能力，要求学生心中有图，是基础题.

10. (3分) 圆心在抛物线 $y^2=2x$ 上，且与 x 轴和该抛物线的准线都相切的一个圆的方程是 ()

- A. $x^2+y^2 - x - 2y - \frac{1}{4}=0$ B. $x^2+y^2+x - 2y+1=0$ C. $x^2+y^2 - x - 2y+1=0$ D. $x^2+y^2 - x - 2y + \frac{1}{4}=0$

考点： 圆的一般方程.

分析： 所求圆圆心在抛物线 $y^2=2x$ 上，且与 x 轴和该抛物线的准线都相切，不难由抛物线的定义知道，可得结果.

解答： 解：圆心在抛物线 $y^2=2x$ 上，且与 x 轴和该抛物线的准线都相切的一个圆的方程，以及抛物线的定义可知，所求圆的圆心的横坐标 $x=\frac{1}{2}$ ，即圆心 $(\frac{1}{2}, 1)$ ，半径是 1，所以排除 A、B、C. 故选项 D.

点评： 本题考查圆的方程，抛物线的定义，考查数形结合、转化的数学思想，是中档题.

11. (3分) 在 $[0, 2\pi]$ 上满足 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $[0, \frac{\pi}{6}]$ B. $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ C. $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ D. $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$

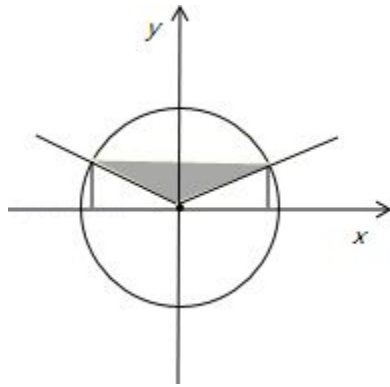
考点： 正弦函数的单调性.

专题： 计算题.

分析： 利用三角函数线，直接得到 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围，得到正确选项.

解答:

解: 在 $[0, 2\pi]$ 上满足 $\sin x \geq \frac{1}{2}$, 由三角函数线可知, 满足 $\sin x \geq \frac{1}{2}$ 的解, 在图中阴影部分, 故选 B



点评:

本题是基础题, 考查三角函数的求值, 利用单位圆三角函数线, 或三角函数曲线, 都可以解好. 本题是特殊角的三角函数值, 可以直接求解.

12. (3分) 已知直线 l_1 和 l_2 的夹角平分线为 $y=x$, 如果 l_1 的方程是 $ax+by+c=0$, 那么直线 l_2 的方程为 ()

- A. $bx+ay+c=0$ B. $ax - by+c=0$ C. $bx+ay - c=0$ D. $bx - ay+c=0$

考点: 与直线关于点、直线对称的直线方程.

专题: 计算题.

分析: 因为由题意知, 直线 l_1 和 l_2 关于直线 $y=x$ 对称, 故把 l_1 的方程中的 x 和 y 交换位置即得 l_2 的方程.

解答: 解: 因为夹角平分线为 $y=x$, 所以直线 l_1 和 l_2 关于直线 $y=x$ 对称, 故 l_2 的方程为 $bx+ay+c=0$. 故选 A.

点评: 本题考查求对称直线的方程的方法, 当两直线关于直线 $y=x$ 对称时, 把其中一个方程中的 x 和 y 交换位置即得另一条直线的方程.

13. (3分) 如果 $\alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 且 $\tan \alpha < \cot \beta$, 那么必有 ()

- A. $\alpha < \beta$ B. $\beta < \alpha$ C. $\pi < \alpha + \beta < \frac{3}{2}\pi$
 $\frac{1+\beta^{-x}}{1+\beta^x} = 3$ $\alpha + \beta > \frac{3}{2}\pi$

考点: 正切函数的单调性.

专题: 计算题.

分析: 先判断 $\tan \alpha < 0$ 且 $\cot \beta < 0$, 不等式即 $\tan \alpha \cdot \tan \beta > 1$, 由 $\tan(\alpha + \beta) > 0$ 及 $\pi < \alpha + \beta < \frac{3}{2}\pi$.

$$\pi < \alpha + \beta < \frac{3}{2}\pi.$$

解答:

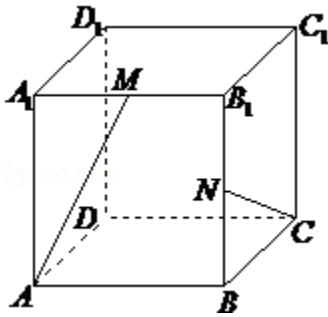
解: $\because \alpha, \beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \therefore \tan \alpha < 0$ 且 $\cot \beta < 0$, 不等式 $\tan \alpha < \cot \beta$, 即 $\tan \alpha < \tan \alpha \cdot \tan \beta > 1, \therefore \tan \alpha + \tan \beta < 0$,

$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} > 0$, 又 $\pi < \alpha + \beta < 2\pi, \therefore \pi < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$,

故选 C.

点评: 本题考查正切值在各个象限内的符号, 以及正切函数的单调性.

14. (3分) 在棱长为1的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M和N分别为 A_1B_1 和 BB_1 的中点, 那么直线AM与CN所成角的余弦值是 ()



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{2}{5}$

考点: 异面直线及其所成的角.

专题: 计算题.

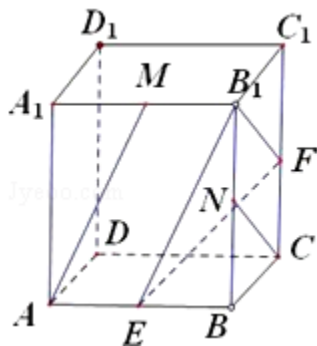
分析: 先通过平移将两条异面直线平移到同一个起点 B_1 , 得到的锐角或直角就是异面直线所成的角, 再利用余弦定理求出此角即可.

解答: 解: 如图, 将AM平移到 B_1E , NC平移到 B_1F , 则 $\angle EB_1F$ 为直线AM与CN所成角

设边长为2, 则 $B_1E = B_1F = \sqrt{5}$, $EF = \sqrt{6}$,

$$\therefore \cos \angle EB_1F = \frac{2}{5},$$

故选 D.



点评: 本题主要考查了异面直线及其所成的角, 以及余弦定理的应用, 属于基础题.

15. (3分) 已知复数 z 的模为2, 则 $|z - i|$ 的最大值为 ()

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{5}$

D. 3

考点：复数的代数表示法及其几何意义.

分析：根据复数的几何意义，知 $|z|=2$ 对应的轨迹是圆心在原点半径为2的圆， $|z-i|$ 表示的是圆上一点到点 $(0, 1)$ 的距离，其最大值为圆上点 $(0, -2)$ 到点 $(0, 1)$ 的距离.

解答：解： $\because |z|=2$ ，则复数 z 对应的轨迹是以圆心在原点，半径为2的圆，而 $|z-i|$ 表示的是圆上一点到点 $(0, 1)$ 的距离， \therefore 其最大值为圆上点 $(0, -2)$ 到点 $(0, 1)$ 的距离，最大的距离为3.
故选D.

点评：本题考查了复数及复数模的几何意义，数形结合可简化解答.

16. (3分) 函数 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的反函数 ()

- A. 是奇函数，它在 $(0, +\infty)$ 上是减函数
- B. 是偶函数，它在 $(0, +\infty)$ 上是减函数
- C. 是奇函数，它在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
- D. 是偶函数，它在 $(0, +\infty)$ 上是增函数

考点：反函数；函数单调性的判断与证明；函数奇偶性的判断.

专题：计算题；综合题.

分析：先求函数的反函数，注意函数的定义域，然后判定反函数的奇偶性，单调性，即可得到选项.

解答：解：设 $e^x = t$ ($t > 0$)，

$$\begin{aligned} \text{则 } 2y &= t + \frac{1}{t}, \\ t^2 - 2yt - 1 &= 0, \end{aligned}$$

解方程得 $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$ 负根已舍去，

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

对换 X, Y 同取对数得函数 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的反函数：

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

由于 $g(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -g(x)$ ，所以它是奇函数，并且它在 $(0, +\infty)$ 上是增函数.

故选C.

点评： 本题考查反函数的求法，函数的奇偶性，单调性的判定，是基础题.

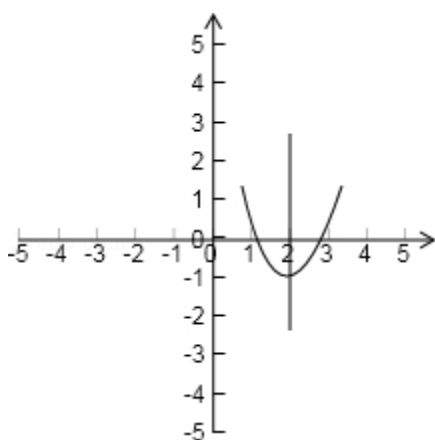
17. (3分) 如果函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t) = f(2-t)$, 那么 ()
- A. $f(2) < f(1)$ B. $f(1) < f(2)$ C. $f(2) < f(4)$ D. $f(4) < f(2)$
- $< f(4)$ $< f(4)$ $< f(1)$ $< f(1)$

考点： 二次函数的图象；二次函数的性质.

专题： 压轴题；数形结合.

分析： 先从条件“对任意实数 t 都有 $f(2+t) = f(2-t)$ ”得到对称轴，然后结合图象判定函数值的大小.

解答： 解： \because 对任意实数 t 都有 $f(2+t) = f(2-t)$
 $\therefore f(x)$ 的对称轴为 $x=2$, 而 $f(x)$ 是开口向上的二次函数故可画图观察
可得 $f(2) < f(1) < f(4)$,
故选 A.



点评： 本题考查了二次函数的图象，通过图象比较函数值的大小，数形结合有助于我们的解题，形象

18. (3分) 长方体的全面积为 11, 十二条棱长度之和为 24, 则这个长方体的一条对角线长为 ()
- A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{14}$ C. 5 D. 6

考点： 棱柱的结构特征.

专题： 计算题；压轴题.

分析： 设出长方体的长、宽、高，表示出长方体的全面积为 11, 十二条棱长度之和为 24, 然后整理可求长度.

解答： 解： 设长方体的长、宽、高分别为 a, b, c , 由题意可知,
 $4(a+b+c) = 24 \cdots \text{①}$,
 $2ab + 2bc + 2ac = 11 \cdots \text{②}$,
由①的平方减去②可得 $a^2 + b^2 + c^2 = 25$,
这个长方体的一条对角线长为: 5,
故选 C.

点评： 本题考查长方体的有关知识，是基础题.

二、填空题（共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

19. (3 分) (2009·金山区二模) $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n}]$ 的值为

 $\frac{1}{4}$.

考点: 数列的极限.

专题: 计算题.

分析:

先利用等比求和公式求出数列 $\{(-1)^{n-1} \times \frac{1}{3^n}\}$ 的前 n 项和, 再利用极限法则求极限.

解答:

$$\begin{aligned} \text{解: 不妨设 } S_n &= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + (-1)^{n-1} \times \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3} \times [1 - (-\frac{1}{3})^n]}{1 - (-\frac{1}{3})} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \times [1 - (-\frac{1}{3})^n]}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

故答案为: $\frac{1}{4}$.

点评: 本题考查数列极限的知识, 是基础题, 要熟练掌握.

20. (3 分) 已知 α 在第三象限且 $\tan \alpha = 2$, 则 $\cos \alpha$ 的值是

 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

考点: 同角三角函数基本关系的运用; 象限角、轴线角.

专题: 计算题.

分析: 利用 α 在第三象限判断出 $\cos \alpha < 0$, 进而利用同角三角函数的基本关系求得 $\cos \alpha$ 的值.

解答: 解: $\because \alpha$ 在第三象限

$$\therefore \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 \alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1+4}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

故答案为: $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

点评: 本题主要考查了同角三角函数的基本关系的应用. 解题的关键是熟练记忆三角函数中的平方关系.

21. (3 分) 方程 $\frac{1+3^{-x}}{1+3^x} = 3$ 的解是 $x = -1$.

考点：有理数指数幂的化简求值.

分析：将方程两边乘以 $1+3^x$ ，令 $t=3^x$ ，然后移项、合并同类项，从而解出 x .

解答：

$$\frac{1+3^{-x}}{1+3^x}=3$$

$$\text{解：} \because 1+3^x \neq 0,$$

$$\therefore 1+3^{-x}=3(1+3^x),$$

$$\text{令 } t=3^x,$$

$$\text{则 } 1+\frac{1}{t}=3+3t,$$

$$\text{解得 } t=\frac{1}{3},$$

$$\therefore x=-1,$$

故答案为： $x=-1$.

点评：此题考查有理数指数幂的化简，利用换元法求解方程的根，是一道不错的题.

22. (3分) 设有 10 个元素的集合的全部子集数为 S ，其中由 3 个元素组成的子集数为

$$T, \text{ 则 } \frac{T}{S} \text{ 的值为 } \underline{\frac{15}{128}}.$$

考点：子集与真子集.

专题：计算题；压轴题.

分析：先根据子集的定义，求集合的子集及其个数，子集即是指属于集合的部分或所有元素组成的集合.

解答：解： \because 含有 10 个元素的集合的全部子集数为 $2^{10}=1024$,

又 \because 其中由 3 个元素组成的子集数为 $C_{10}^3=120$.

$$\therefore \text{则 } \frac{T}{S} \text{ 的值为 } \frac{120}{1024} = \frac{15}{128}.$$

$$\text{故填： } \frac{15}{128}.$$

点评：本题考查集合的子集个数问题，对于集合 M 的子集问题一般来说，若 M 中有 n 个元素，则集合有 2^n 个.

23. (3分) 焦点为 $F_1(-2, 0)$ 和 $F_2(6, 0)$ ，离心率为 2 的双曲线的方程是

$$\underline{\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1}.$$

考点：双曲线的标准方程；双曲线的简单性质.

专题：计算题；压轴题.

分析：先由已知条件求出 a, b, c 的值，然后根据函数的平移求出双曲线的方程.

解答： 解：∵双曲线的焦点为 $F_1(-2, 0)$ 和 $F_2(6, 0)$ ，离心率为 2，

$$\therefore 2c = 6 - (-2) = 8, c = 4, \frac{c}{a} = 2, a = 2, b^2 = 16 - 4 = 12,$$

$$\therefore \text{双曲线的方程是 } \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

$$\text{故答案为: } \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

点评： 本题考查双曲线方程的求法，解题时要注意函数的平移变换，合理地选取公式。

三、解答题（共 5 小题，满分 51 分）

24. （9 分）求 $\sin^2 20^\circ + \cos^2 80^\circ + \sin 20^\circ \cos 80^\circ$ 的值.

考点： 三角函数恒等式的证明.

专题： 计算题.

分析： 见到平方式就降幂，见到乘积式就积化和差，将前二项用降幂公式，后两项积化和差，结合特殊函数值即可解决.

解答： 解：原式 $= \frac{1}{2}(1 - \cos 40^\circ) + \frac{1}{2}(1 + \cos 160^\circ) + \frac{3}{4}(\sin 100^\circ - \sin 20^\circ)$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 160^\circ - \cos 40^\circ) + \frac{3}{4}\sin 100^\circ - \frac{3}{4}$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 100^\circ \sin 60^\circ + \frac{3}{2}\sin 100^\circ$$

$$= \frac{1}{4}$$

故答案为 $\frac{1}{4}$.

点评： 本题主要考查知识点：两角和与差、二倍角的三角函数.

25. （10 分）设 $z \in \mathbb{C}$ ，解方程 $z - 2|z| = -7 + 4i$.

考点： 复数相等的充要条件.

专题： 计算题.

分析： 设 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) 代入方程，由实部和虚部相等列出方程组，求出方程组的解验证后，再

解答：

解：设 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)，依题意有 $x + yi - 2\sqrt{x^2 + y^2} = -7 + 4i$,

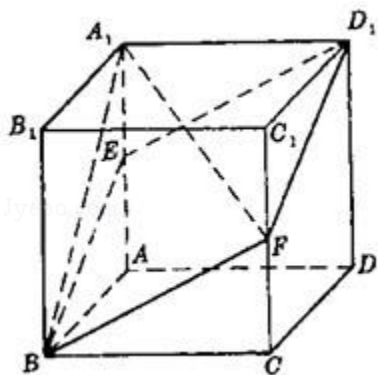
$$\text{由复数相等的定义得, } \begin{cases} x - 2\sqrt{x^2 + y^2} = -7 \\ y = 4. \end{cases} \text{ 解得 } y = 4, \text{ 且 } x - 2\sqrt{x^2 + 16} = -7 \text{ ①.}$$

解方程①并经检验得 $x_1 = 3, x_2 = \frac{5}{3}$.

$$\therefore z_1 = 3 + 4i, z_2 = \frac{5}{3} + 4i.$$

点评： 本小题主要考查复数相等的条件及解方程的知识，考查了计算能力.

26. (10分) 如图，已知 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体， E 、 F 分别为棱 AA_1 与 CC_1 的中点，求四棱锥的 $A_1 - EBF D_1$ 的体积.



考点： 棱柱、棱锥、棱台的体积.

专题： 计算题；转化思想.

分析： 法一：判断四棱锥 $A_1 - EBF D_1$ 的底面是菱形，连接 A_1C_1 、 EF 、 BD_1 ，说明 A_1C_1 到底面 $EBF D_1$ 的距离，求出底面 $S_{\text{菱形}EBF D_1}$ ，高的大小，即可得到棱锥的体积.

法二：三棱锥 $A_1 - EFB$ 与三棱锥 $A_1 - EFD_1$ 等底同高，棱锥 $V_{A_1 - EBF D_1}$ 转化为 $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle EBA}$ 可.

解答：

解：法一： $\because EB=BF=FD_1=D_1E = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$

\therefore 四棱锥 $A_1 - EBF D_1$ 的底面是菱形. (2分)

连接 A_1C_1 、 EF 、 BD_1 ，则 $A_1C_1 \parallel EF$.

根据直线和平面平行的判定定理， A_1C_1 平行于 $A_1 - EBF D_1$ 的底面，

从而 A_1C_1 到底面 $EBF D_1$ 的距离就是 $A_1 - EBF D_1$ 的高 (4分)

设 G 、 H 分别是 A_1C_1 、 EF 的中点，连接 D_1G 、 GH ，则 $FH \perp HG$ ， $FH \perp HD_1$

根据直线和平面垂直的判定定理，有 $FH \perp$ 平面 HGD_1 ，

又，四棱锥 $A_1 - EBF D_1$ 的底面过 FH ，根据两平面垂直的判定定理，

有 $A_1 - EBF D_1$ 的底面 \perp 平面 HGD_1 . 作 $GK \perp HD_1$ 于 K ，

根据两平面垂直的性质定理，有 GK 垂直于 $A_1 - EBF D_1$ 的底面. (6分)

\because 正方体的对角面 AA_1CC_1 垂直于底面 $A_1B_1C_1D_1$ ， $\therefore \angle HGD_1 = 90^\circ$.

在 $Rt\triangle HGD_1$ 内， $GD_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ， $HG = \frac{1}{2}a$ ， $HD_1 = \frac{BD_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot GK = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，从而 $GK = \frac{\sqrt{6}}{6}a$. (8分)

$\therefore V_{A_1 - EBF D_1} = \frac{1}{3} S_{\text{菱形}EBF D_1} \cdot GK = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot EF \cdot BD_1 \cdot GK$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{3}a \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}a = \frac{1}{6}a^3 \quad (10 \text{分})$$

解法二： $\because EB=BF=FD_1=D_1E= \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$

\therefore 四棱锥 $A_1 - EBF D_1$ 的底面是菱形. (2分)

连接 EF , 则 $\triangle EFB \cong \triangle EFD_1$.

\therefore 三棱锥 $A_1 - EFB$ 与三棱锥 $A_1 - EFD_1$ 等底同高,

$$\therefore V_{A_1 - EFB} = V_{A_1 - EFD_1}.$$

$$\therefore V_{A_1 - EBF D_1} = 2V_{A_1 - EFB}. \quad (4 \text{分})$$

$$\text{又 } V_{A_1 - EFB} = V_{F - EB A_1},$$

$$\therefore V_{A_1 - EBF D_1} = 2V_{F - EB A_1}, \quad (6 \text{分})$$

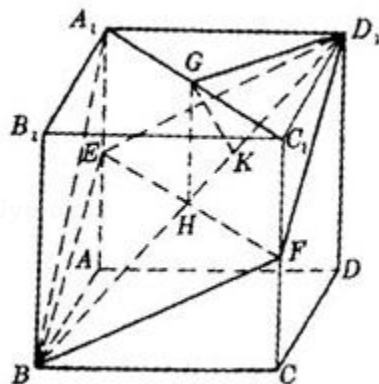
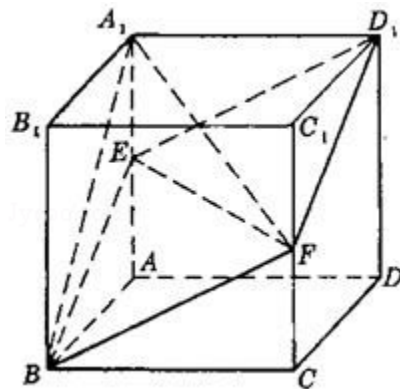
$\because CC_1 \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ,

\therefore 三棱锥 $F - EB A_1$ 的高就是 CC_1 到

平面 ABB_1A_1 的距离, 即棱长 a . (8分)

又 $\triangle EB A_1$ 边 EA_1 上的高为 a .

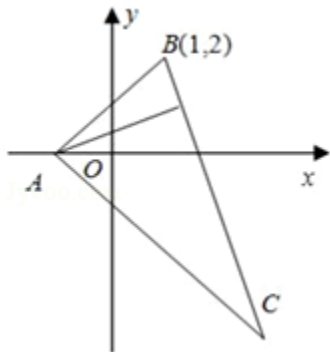
$$\therefore V_{A_1 - EBF D_1} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle EB A_1} \cdot a = \frac{1}{6}a^3. \quad (10 \text{分})$$



点评:

本小题主要考查直线与直线, 直线与平面, 平面与平面的位置关系, 以及空间想象能力和逻辑

27. (10分) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知BC边上的高所在直线的方程为 $x - 2y + 1 = 0$, $\angle A$ 的平分线所在直线的方程为 $y = 0$. 若点B的坐标为 $(1, 2)$, 求点C的坐标.



考点: 直线的点斜式方程.

专题: 压轴题.

分析: 根据三角形的性质解A点, 再解出AC的方程, 进而求出BC方程, 解出C点坐标. 逐步解答.

解答: 解: 点A为 $y = 0$ 与 $x - 2y + 1 = 0$ 两直线的交点,

\therefore 点A的坐标为 $(-1, 0)$.

$$\therefore k_{AB} = \frac{2 - 0}{1 - (-1)} = 1.$$

又 $\because \angle A$ 的平分线所在直线的方程是 $y = 0$,

$\therefore k_{AC} = -1$.

\therefore 直线AC的方程是 $y = -x - 1$.

而BC与 $x - 2y + 1 = 0$ 垂直, $\therefore k_{BC} = -2$.

\therefore 直线BC的方程是 $y - 2 = -2(x - 1)$.

由 $y = -x - 1$, $y = -2x + 4$,

解得 $C(5, -6)$.

故选C $(5, -6)$.

点评: 本题可以借助图形帮助理解题意, 将条件逐一转化求解, 这是上策.

28. (12分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 S_n . 已知 $a_3 = 12$, $S_{12} > 0$, $S_{13} < 0$.

(1) 求公差d的取值范围.

(2) 指出 S_1, S_2, \dots, S_{12} 中哪一个值最大, 并说明理由.

考点: 等差数列的前n项和; 数列的函数特性.

专题: 计算题; 压轴题.

分析: (1) 由 $S_{12} > 0$, $S_{13} < 0$, 利用等差数列的前n项和的公式化简分别得到①和②, 然后利用等差公式化简 a_3 得到首项与公差的关系式, 解出首项分别代入到①和②中得到关于d的不等式组, 组的解集即可得到d的范围;

(2) 根据(1)中d的范围可知d小于0, 所以此数列为递减数列, 在n取1到12中的正整数有一项大于0, 它的后一项小于0, 则这项与之前的各项相加就最大, 根据 $S_{12} > 0$, $S_{13} < 0$, 和的性质及前n项和的公式化简可得 S_1, S_2, \dots, S_{12} 中最大的项.

解答:

解: (1) 依题意, 有 $S_{12}=12a_1+\frac{12\times(12-1)}{2}\cdot d>0$,

$$S_{13}=13a_1+\frac{13\times(13-1)}{2}\cdot d<0$$

$$\text{即} \begin{cases} 2a_1+11d>0 \textcircled{1} \\ a_1+6d<0 \textcircled{2} \end{cases}$$

由 $a_3=12$, 得 $a_1=12-2d$ ③,

将③式分别代①、②式, 得 $\begin{cases} 24+7d>0 \\ 3+d<0 \end{cases}$

$$\therefore -\frac{24}{7}<d<-3.$$

(2) 由 $d<0$ 可知 $a_1>a_2>a_3>\dots>a_{12}>a_{13}$.

因此, 若在 $1\leq n\leq 12$ 中存在自然数 n , 使得 $a_n>0$, $a_{n+1}<0$,

则 S_n 就是 S_1, S_2, \dots, S_{12} 中的最大值.

$$\Rightarrow \begin{cases} 6(a_1+a_{12})=6(a_6+a_7)>0 \\ \frac{13}{2}(a_1+a_{13})=\frac{26a_7}{2}=13a_7<0, \end{cases}$$

$$\therefore a_6>0, a_7<0,$$

故在 S_1, S_2, \dots, S_{12} 中 S_6 的值最大.

点评:

本小题考查数列、不等式及综合运用有关知识解决问题的能力, 是一道中档题.