1990 年湖南高考文科数学真题及答案

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后括号内.

(1)方程 $2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$ 的解是

(A) $x=\frac{1}{9}$　　(B) $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C) $x=\sqrt{3}$　　(D) $x=9$

(2) cos275° +cos215° +cos75° cos15° 的值等于

(A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　(B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{5}{4}$　　(D) $1+\frac{\sqrt{3}}{4}$

(3)如果轴截面为正方形的圆柱的侧面积是 S,那么圆柱的体积等于

(A) $\frac{S}{2}\sqrt{S}$　　(B) $\frac{S}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(C) $\frac{S}{4}\sqrt{S}$　　(D) $\frac{S}{4}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(4)把复数 1+i 对应的向量按顺时针方向旋转 $\frac{2\pi}{3}$,所得到的向量对应的复数是

(A) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$.　(B) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$.

(C) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$.　(D) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$.

(5)双曲线$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$的准线方程是

(A)$y=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$　　(B)$x=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$

(C)$x=\pm\frac{16}{5}$　　(D)$y=\pm\frac{16}{5}$

(6)已知上图是函数 y=2sin(ωx+ψ)(|ψ|<$\frac{\pi}{2}$)的图象,那么

(A)$\omega=\frac{10}{11}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$　　(B)$\omega=\frac{10}{11}$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$

(C)$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$　　(D)$\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$

(7)设命题甲为:0<x<5;命题乙为:|x-2|<3.那么

(A)甲是乙的充分条件,但不是乙的必要条件.

(B)甲是乙的必要条件,但不是乙的充分条件.

(C)甲是乙的充要条件.

(D)甲不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件.

(8)函数$y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|}+\frac{|\operatorname{ctg} x|}{\operatorname{ctg} x}$的值域是

(A){-2,4}　　(B){-2,0,4}

(C){-2,0,2,4}　　(D){-4,-2,0,4}

(9)如果直线 y=ax+2 与直线 y=3x-b 关于直线 y=x 对称,那么

(A)$a=\frac{1}{3}$，$b=6$　　(B)$a=\frac{1}{3}$，$b=-6$

(C)a=3,b=-2　　(D)a=3,b=6

(10)如果抛物线 $y2=a(x+1)$ 的准线方程是 $x=-3$,那么这条抛物线的焦点坐标是

(A)(3,0)　　　　(B)(2,0)

(C)(1,0)　　　　(D)(-1,0)

(11)设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$,集合 $M=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$,$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$.

那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 等于

(A)Φ　　　　(B){(2,3)}

(C)(2,3)　　　　(D){(x,y)|y=x+1}

(12)A,B,C,D,E 五人并排站成一排,如果 A,B 必须相邻且 B 在 A 的右边,那么不同的排法共有

(A)60 种　　　　(B)48 种

(C)36 种　　　　(D)24 种

(13)已知 $f(x)=x5+ax3+bx-8$,且 $f(-2)=10$,那么 $f(2)$ 等于

(A)-26　　　　(B)-18

(C)-10　　　　(D)10

(14)如图,正三棱锥 S-ABC 的侧棱与底面边长相等,如果 E、F 分别为 SC、AB 的中点,那么异面直线 EF 与 SA 所成的角等于

(A)90°

(B)60°

(C)45°

(D)30°

(15)以一个正三棱柱的顶点为顶点的四面体共有

(A)6 个　　　　(B)12 个

(C)18 个　　　　(D)30 个

二、填空题:把答案填在题中横线上.

(16)已知$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2}，\pi)$，那么$\sin\frac{\alpha}{2}$的值等于________.

(17)(x-1)-(x-1)2+(x-1)3-(x-1)4+(x-1)5 的展开式中,x2 的系数等于____________________.

(18)已知$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列,如果 S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项的和,那么$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}$等于__________.

(19)如图,三棱柱 ABC—A1B1C1 中,若 E、F 分别为 AB、AC 的中点,平面 EB1C1F 将三棱柱分成体积为 V1、V2 的两部分,那么 V1:V2=_________________.

(20)如果实数x，y满足等式$(x-2)^2+y^2=3$，那么$\frac{y}{x}$的最大值是____.

三、解答题.

(21)有四个数,其中前三个数成等差数列,后三个数成等比数列,并且第一个数与第四个数的和是 16,第二个数与第三个数的和是 12,求这四个数.

(22)已知$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$，$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$，求$tg(\alpha+\beta)$的值.

(23)如图,在三棱锥 S-ABC 中,SA⊥底面 ABC,AB⊥BC.DE 垂直平分 SC,且分别交 AC、SC 于 D、E.又 SA=AB,SB=BC.求以 BD 为棱,以 BDE 与 BDC 为面的二面角的度数.

(24)已知 a>0,a≠1,解不等式 loga(4+3x-x2)-loga(2x-1)>loga2.

(25)设 a≥0,在复数集 C 中解方程 z2+2｜z｜=a.

参考答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

(1)A　　(2)C　　(3)D　　(4)B　　(5)D

(6)C　　(7)A　　(8)B　　(9)A　　(10)C

(11)B　　(12)D　　(13)A　　(14)C　　(15)B

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(16)$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　(17)-20　　(18)2　　(19)7:5　　(20)$\sqrt{3}$

三、解答题.

(21)本小题考查等差数列、等比数列的概念和运用方程(组)解决问题的能力.

解法一：设四个数依次为$a-d$，a，$a+d$，$\frac{(a+d)^2}{a}$.

依题意有

$$\begin{cases}(a-d)+\dfrac{(a+d)^2}{a}=16, & ①\\ a+(a+d)=12. & ②\end{cases}$$

由②式得　　$d=12-2a$.　　③

将③式代入①式得$[a-(12-2a)]+\frac{(12-a)^2}{a}=16$，

整理得 $a2-13a+36=0$.

解得　$a1=4$，$a2=9$.

代入③式得　$d1=4$，　$d2=-6$.

从而得所求四个数为0,4,8,16或15,9,3,1.

解法二:设四个数依次为x,y,12-y,16-x.

依题意,有

$$\begin{cases} x+(12-y)=2y, & ① \\ y(16-x)=(12-y)^2 & ② \end{cases}$$

由①式得　　　　x=3y-12.　　　　　③

将③式代入②式得　　　y(16-3y+12)=(12-y)2,

整理得 y2-13y+36=0.

解得　y1=4,y2=9.

代入③式得　　x1=0,x2=15.

从而得所求四个数为 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

(22)本小题考查三角公式以及三角函数式的恒等变形和运算能力.

解法一:由已知得

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{4},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{3},$$

两式相除得

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4}.$$

所以　$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{2\times\dfrac{3}{4}}{1-(\dfrac{3}{4})^2}=\dfrac{24}{7}.$

解法二:如图,不妨设 0≤α≤β<2π,且点 A 的坐标是(cosα,sinα),点 B 的坐标是(cosβ,sinβ),则点 A,B 在单位圆 x2+y2=1 上.连结 AB,若 C 是 AB 的中点,由题设知点 C

的坐标是$(\frac{1}{6},\ \frac{1}{8})$.

连结OC,于是OC⊥AB,若设点D的坐标是(1,0),再连结OA,OB,则有

$$\angle DOA=\alpha,\ \angle DOB=\beta,\ \angle DOC=\frac{\alpha+\beta}{2}-\pi.$$

从而 $$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{tg}\angle DOC=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{4}.$$

所以 $$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{24}{7}.$$

解法三:由题设得 $4(\sin\alpha+\sin\beta)=3(\cos\alpha+\cos\beta)$.

将上式变形为 $$\frac{4}{5}\sin\alpha-\frac{3}{5}\cos\alpha=\frac{3}{5}\cos\beta-\frac{4}{5}\sin\beta. \qquad ①$$

设 $$\cos\varphi=\frac{4}{5},\quad \sin\varphi=\frac{3}{5}, \qquad ②$$

将②式代入①式,可得 $\sin(\alpha-j)=\sin(j-\beta)$.

于是 $\alpha-j=(2k+1)\pi-(j-\beta)(k\in Z)$,

或 $\alpha-j=2k\pi+(j-\beta)(k\in Z)$.

若 $\alpha-j=(2k+1)\pi-(j-\beta)(k\in Z)$,则 $\alpha=\beta+(2k+1)\pi(k\in Z)$.

于是 $\sin\alpha=-\sin\beta$,即 $\sin\alpha+\sin\beta=0$.

这与已知条件 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$矛盾。

由此可知 $\alpha-j=2k\pi+(j-\beta)(k\in Z)$.

即 $\alpha+\beta=2j+2k\pi(k\in Z)$.

由②式得 $$\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{4}.$$

所以 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}2\varphi=\dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}=\dfrac{2\times\dfrac{3}{4}}{1-(\dfrac{3}{4})^2}=\dfrac{24}{7}$.

(23)本小题考查直线和平面,直线和直线的位置关系,二面角等基本知识,以及逻辑推理能力和空间想象能力.

解法一:由于 SB=BC,且 E 是 SC 的中点,因此 BE 是等腰三角形 SBC 的底边 SC 的中线,所以 SC⊥BE.

又已知 SC⊥DE,BE∩DE=E,

∴ SC⊥面 BDE,

∴ SC⊥BD.

又 ∵SA⊥底面 ABC,BD 在底面 ABC 上,∴SA⊥BD.

而 SC∩SA=S,∴BD⊥面 SAC.

∵ DE=面 SAC∩面 BDE,DC=面 SAC∩面 BDC,

∴ BD⊥DE,BD⊥DC.

∴ ∠EDC 是所求的二面角的平面角.

∵ SA⊥底面 ABC,∴SA⊥AB,SA⊥AC.

设 $SA=a$. 则 $AB=a$，$BC=SB=\sqrt{2}a$.

又因为 $AB\perp BC$，所以 $AC=\sqrt{3}a$.

在 $Rt\triangle SAC$ 中，$\operatorname{tg}\angle ACS=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\therefore\angle ACS=30^\circ$.

又已知 DE⊥SC,所以∠EDC=60°,即所求的二面角等于 60°.

解法二:由于 SB=BC,且 E 是 SC 的中点,因此 BE 是等腰三角形 SBC 的底边 SC 的中线,所以 SC⊥BE.

又已知 SC⊥DE,BE∩DE=E.

∴ SC⊥面 BDE,

∴ SC⊥BD.

由于 SA⊥底面 ABC,且 A 是垂足,所以 AC 是 SC 在平面 ABC 上的射影.由三垂线定理的逆定理得 BD⊥AC;又因 E∈SC,AC 是 SC 在平面 ABC 上的射影,所以 E 在平面 ABC 上的射影在 AC 上,由于 D∈AC,所以 DE 在平面 ABC 上的射影在 AC 上,根据三垂线定理又得 BD⊥DE.

∵DE 面 BDE,DC 面 BDC,

∴∠EDC 是所求的二面角的平面角.

以下同解法一.

(24)本小题考查对数,不等式的基本知识及运算能力.

解:原不等式可化为

loga(4+3x-x2)>loga2(2x-1).　　①

当 0<a<1 时,①式等价于

$$\begin{cases}4+3x-x^2>0,\\2(2x-1)>0,\\4+3x-x^2<2(2x-1).\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4+3x-x^2>0,\\4+3x-x^2<2(2x-1).\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(4-x)(1+x)>0,\\(x+3)(x-2)>0.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<4,\\x<-3\text{或}x>2.\end{cases}$$

$\Leftrightarrow 2<x<4.$ 即当 0<a<1 时,原不等式的解集是{x|2<x<4}.

当 a>1 时,①式等价于

$$\begin{cases}4+3x-x^2>0,\\2(2x-1)>0,\\4+3x-x^2>2(2x-1).\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\-3<x<2.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x<2.$$

即当$a>1$时，原不等式的解集是$\{x|\frac{1}{2}<x<2\}$.

综合以上讨论知,当 $0<a<1$ 时,原不等式的解集是$\{x \mid 2<x<4\}$,当 $a>1$ 时,原不等式的解集是$\{x \mid \frac{1}{2}<x<2\}$.

(25)本小题考查复数与解方程等基本知识以及综合分析能力.

解法一:设 $z=x+yi$,代入原方程得

$$x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=a,$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases}x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}=a, & ①\\2xy=0. & ②\end{cases}$$

由②式得 $y=0$ 或 $x=0$. 由此可见,若原方程有解,则其解或为实数或为纯虚数. 下面分别加以讨论.

情形 1. 若 $y=0$,即求原方程的实数解 $z=x$. 此时,①式化为

$x^2+2|x|=a$. ③

(Ⅰ)令 $x>0$,方程③变为 $x^2+2x=a$. ④

解方程④得 $x=-1\pm\sqrt{1+a}$.

由此可知:当 $a=0$ 时,方程④无正根;

当$a>0$时，方程④有正根 $x=-1+\sqrt{1+a}$.

(Ⅱ)令 $x<0$,方程③变为 $x^2-2x=a$. ⑤

解方程⑤得 $x=1\pm\sqrt{1+a}$.

由此可知:当 $a=0$ 时,方程⑤无负根;

当$a>0$时，方程⑤有负根 $x=1-\sqrt{1+a}$.

(Ⅲ)令 $x=0$,方程③变为 $0=a$. ⑥

由此可知:当 $a=0$ 时,方程⑥有零解 $x=0$;

当 $a>0$ 时,方程⑥无零解.

所以,原方程的实数解是:

当 $a=0$ 时,$z=0$;

当$a>0$时，$z=\pm(1-\sqrt{1+a})$.

情形 2. 若 $x=0$,由于 $y=0$ 的情形前已讨论,现在只需考查 $y\neq0$ 的情形,即求原方程的纯虚数解 $z=yi(y\neq0)$.此时,①式化为

$-y^2+2|y|=a$. ⑦

(Ⅰ)令 $y>0$,方程⑦变为$-y^2+2y=a$,即$(y-1)^2=1-a$. ⑧

由此可知:当 $a>1$ 时,方程⑧无实根.

当$a\leqslant1$时，解方程⑧得 $y=1\pm\sqrt{1-a}$，从而, 当 $a=0$ 时,方程⑧有正根 $y=2$;

当$0<a\leqslant1$时，方程⑧有正根 $y=1\pm\sqrt{1-a}$.

(Ⅱ)令 $y<0$,方程⑦变为$-y^2-2y=a$,即$(y+1)^2=1-a$. ⑨

由此可知:当 $a>1$ 时,方程⑨无实根.

当$a \leqslant 1$时解方程⑨得 $y=-1\pm\sqrt{1-a}$，

从而, 当 a=0 时,方程⑨有负根 y=-2;

当$0<a \leqslant 1$时，方程⑨有负根 $y=-1\pm\sqrt{1-a}$.

所以,原方程的纯虚数解是:

当 a=0 时,z=±2i;

当$0<a \leqslant 1$时，$z=\pm(1+\sqrt{1-a})i$，$z=\pm(1-\sqrt{1-a})i$.

而当 a>1 时,原方程无纯虚数解.

解法二:设 z=x+yi,代入原方程得

$$x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=a,$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}=a, & ① \\ 2xy=0. & ② \end{cases}$$

由②式得 y=0 或 x=0.由此可见,若原方程有解,则其解或为实数,或为纯虚数.下面分别加以讨论.

情形 1. 若 y=0,即求原方程的实数解 z=x.此时,①式化为

x2+2｜x｜=a.

即 $|x|^2+2|x|=a$. ③

解方程③得 $|x|=-1+\sqrt{1+a}$,

所以，原方程的实数解是$z=\pm(-1+\sqrt{1+a})$.

情形 2. 若 x=0,由于 y=0 的情形前已讨论,现在只需考查 y≠0 的情形,即求原方程的纯虚数解 z=yi(y≠0).此时,①式化为

-y2+2｜y｜=a.

即 $-|y|^2+2|y|=a.$ ④

当 a=0 时,因 y≠0,解方程④得｜y｜=2,

即当 a=0 时,原方程的纯虚数解是 z=±2i.

当 $0<a\leqslant 1$ 时，解方程④得 $|y|=1\pm\sqrt{1-a}$.

即当 0<a≤1 时,原方程的纯虚数解是

$z=\pm(1+\sqrt{1-a})i$，$z=\pm(1-\sqrt{1-a})i$.

当 a>1 时,方程④无实根,所以这时原方程无纯虚数解.

解法三:因为 z2=-2｜z｜+a 是实数,所以若原方程有解,则其解或为实数,或为纯虚数,即 z=x 或 z=yi(y≠0).

情形 1. 若 z=x.以下同解法一或解法二中的情形 1.

情形 2. 若 z=yi(y≠0).以下同解法一或解法二中的情形 2.

解法四:设 z=r(cosθ+isinθ),其中 r≥0,0≤θ<2π.代入原方程得

r2cos2θ+2r+ir2sin2θ=a.

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} r^2\cos 2\theta+2r=a, & ① \\ r^2\sin 2\theta=0. & ② \end{cases}$$

由②式得 $r=0$ 或 $\theta=\dfrac{k\pi}{2}(k=0，1，2，3)$. 情形 1. 若 r=0.①式变成

0=a. ③

由此可知:当 a=0 时,r=0 是方程③的解.

当 a>0 时,方程③无解.

所以, 当 a=0 时,原方程有解 z=0;

当 a>0 时,原方程无零解.

情形 2. 若 $\theta=\frac{k\pi}{2}$ (k=0,1,2,3),由于 r=0 的情形前已讨论,现在只需考查 r>0 的情形.

(Ⅰ)当 k=0,2 时,对应的复数是 z=±r.因 cos2θ=1,故①式化为

r2+2r=a. ④

解方程④可得$r=-1\pm\sqrt{1+a}$.

由此可知:当 a=0 时,方程④无正根;

当$a>0$时，方程④有正根$r=-1+\sqrt{1+a}$.

所以， 当$a>0$时，原方程有解$z=\pm(\sqrt{1+a}-1)$.

(Ⅱ)当 k=1,3 时,对应的复数是 z=±ri.因 cos2θ=-1,故①式化为

-r2+2r=a,即(r-1)2=1-a, ⑤

由此可知:当 a>1 时,方程⑤无实根,从而无正根;

当$a\leqslant 1$时解方程⑤得 $r=1\pm\sqrt{1-a}$. 从而, 当 a=0 时,方程⑤有正根 r=2;

当$0<a\leqslant 1$时，方程⑤有正根 $r=1\pm\sqrt{1-a}$.

所以, 当 a=o 时,原方程有解 z=±2i;

当 0<a≤1 时,原方程有解

$z=\pm(1+\sqrt{1-a})i$，$z=\pm(1-\sqrt{1-a})i$.

当 a>1 时,原方程无纯虚数解.