

# 2006年黑龙江高考文科数学真题及答案

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分。第I卷1至2页。第II卷3至4页。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

## 第I卷(选择题)

### 注意事项:

1. 答题前,考生在答题卡上务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号填写清楚,并贴好条形码。请认真核准条形码上的准考证号、姓名和科目。

2. 每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,在试题卷上作答无效。

3. 本卷共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

### 参考公式

如果事件A、B互斥,那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件A、B相互独立,那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件A在一次试验中发生的概率是P,那么

$n$ 次独立重复试验中恰好发生 $k$ 次的概率是

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 $R$ 表示球的半径

球的体积公式  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

其中 $R$ 表示球的半径

### 一. 选择题

(1) 已知向量 $\vec{a} = (4, 2)$ , 向量 $\vec{b} = (x, 3)$ , 且 $\vec{a} // \vec{b}$ , 则 $x =$

- (A) 9 (B) 6 (C) 5 (D) 3

(2) 已知集合 $M = \{x | x < 3\}$ ,  $N = \{x | \log_2 x > 1\}$ , 则 $M \cap N =$

- (A)  $\emptyset$  (B)  $\{x | 0 < x < 3\}$   
(C)  $\{x | 1 < x < 3\}$  (D)  $\{x | 2 < x < 3\}$

(3) 函数 $y = \sin 2x \cos 2x$ 的最小正周期是

- (A)  $2\pi$  (B)  $4\pi$  (C)  $\frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{2}$

(4) 如果函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y' = 3 - 2x$ 的图像关于坐标原点对称, 则 $y = f(x)$ 的表达式为

- (A)  $y = 2x - 3$  (B)  $y = 2x + 3$

- (C)  $y = -2x + 3$       (D)  $y = -2x - 3$

(5) 已知  $\triangle ABC$  的顶点 B、C 在椭圆  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  上，顶点 A 是椭圆的一个焦点，且椭圆的另一个焦点在 BC 边上，则  $\triangle ABC$  的周长是

- (A)  $2\sqrt{3}$       (B) 6      (C)  $4\sqrt{3}$       (D) 12

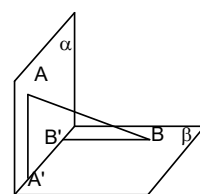
(6) 已知等差数列  $\{a_n\}$  中， $a_2 = 7, a_4 = 15$ ，则前 10 项的和  $S_{10} =$

- (A) 100      (B) 210      (C) 380      (D) 400

(7) 如图，平面  $\alpha \perp$  平面  $\beta$ ， $A \in \alpha, B \in \beta$ ， $AB$  与两平面  $\alpha$ 、 $\beta$  所成的角分别为  $\frac{\pi}{4}$

和  $\frac{\pi}{6}$ 。过 A、B 分别作两平面交线的垂线，垂足为  $A'$ 、 $B'$ ，若  $AB = 12$ ，则  $A'B' =$

- (A) 4      (B) 6      (C) 8      (D) 9



(8) 已知函数  $f(x) = \ln x + 1 (x > 0)$ ，则  $f(x)$  的反函数为

- (A)  $y = e^{x+1} (x \in R)$       (B)  $y = e^{x-1} (x \in R)$

- (C)  $y = e^{x+1} (x > 1)$       (D)  $y = e^{x-1} (x > 1)$

(9) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的一条渐近线方程为  $y = \frac{4}{3}x$ ，则双曲线的离心率为

- (A)  $\frac{5}{3}$       (B)  $\frac{4}{3}$       (C)  $\frac{5}{4}$       (D)  $\frac{3}{2}$

(10) 若  $f(\sin x) = 3 - \cos 2x$ ，则  $f(\cos x) =$

- (A)  $3 - \cos 2x$       (B)  $3 - \sin 2x$

- (C)  $3 + \cos 2x$       (D)  $3 + \sin 2x$

(11) 过点  $(-1, 0)$  作抛物线  $y = x^2 + x + 1$  的切线，则其中一条切线为

- (A)  $2x + y + 2 = 0$       (B)  $3x - y + 3 = 0$       (C)  $x + y + 1 = 0$       (D)  $x - y + 1 = 0$

(12) 5 名志愿者分到 3 所学校支教，每个学校至少去一名志愿者，则不同的分派方法共有

- (A) 150 种      (B) 180 种      (C) 200 种      (D) 280 种

## 第II卷（非选择题，共90分）

### 注意事项：

本卷共2页，10小题，用黑碳素笔将答案答在答题卡上。答在试卷上的答案无效。

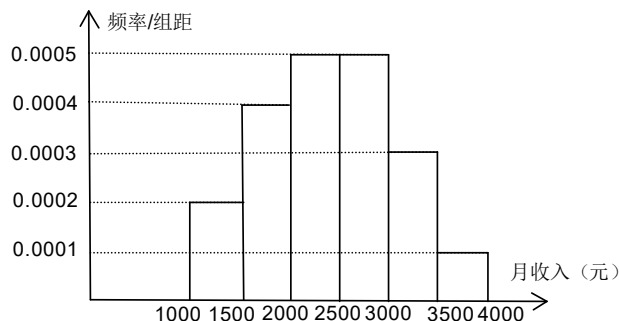
二. 填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分，把答案填在横线上。

(13) 在  $(x^4 + \frac{1}{x})^{10}$  的展开式中常数项是\_\_\_\_\_。（用数字作答）

(14) 圆  $o_1$  是以  $R$  为半径的球  $O$  的小圆，若圆  $o_1$  的面积  $S_1$  和球  $O$  的表面积  $S$  的比为  $S_1 : S = 2 : 9$ ，则圆心  $o_1$  到球心  $O$  的距离与球半径的比  $OO_1 : R =$ \_\_\_\_\_。

(15) 过点  $(1, \sqrt{2})$  的直线  $l$  将圆  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  分成两段弧，当劣弧所对的圆心角最小时，直线  $l$  的斜率  $k =$ \_\_\_\_\_。

(16) 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了10000人，并根据所得数据画了样本的频率分布直方图（如下图）。为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系，要从这10000人中再用分层抽样方法抽出100人作进一步调查，则在  $[2500, 3000)$ （元）月收入段应抽出\_\_\_\_\_人。



三. 解答题：本大题共6小题，共74分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17)（本小题满分12分）

在  $\triangle ABC$  中， $\angle B = 45^\circ$ ,  $AC = \sqrt{10}$ ,  $\cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 求

(1)  $BC = ?$

(2) 若点  $D$  是  $AB$  的中点，求中线  $CD$  的长度。

(18)（本小题满分12分）

设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ， $S_4 = 1, S_8 = 17$ , 求通项公式  $a_n = ?$

(19)（本小题满分12分）

某批产品成箱包装，每箱5件，一用户在购进该批产品前先取出3箱，再从每箱中任意出

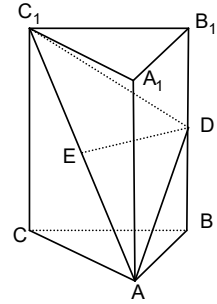
取2件产品进行检验。设取出的第一、二、三箱中分别有0件、1件、2件二等品，其余为一等品。

(I) 求取6件产品中有1件产品是二等品的概率。

(II) 若抽检的6件产品中有2件或2件以上二等品，用户就拒绝购买这批产品，求这批产品被用户拒绝的概率。

(20) (本小题 1 2 分)

如图在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB=BC$ ,  $D$ 、 $E$  分别为  $BB_1$ 、 $AC_1$  的中点。



(I) 证明:  $ED$  为异面直线  $BB_1$  与  $AC_1$  的公垂线;

(II) 设  $AA_1 = AC = \sqrt{2}AB$ , 求二面角  $A_1-AD-C_1$  的大小

(21) (本小题满分为 1 4 分)

设  $a \in R$ , 函数  $f(x) = ax^2 - 2x - 2a$ . 若  $f(x) > 0$  的解集为  $A$ ,  $B = \{x | 1 < x < 3\}$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$ , 求实数  $a$  的取值范围。

(22) (本小题满分 1 2 分)

已知抛物线  $x^2 = 4y$  的焦点为  $F$ ,  $A$ 、 $B$  是抛物线上的两动点, 且  $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB} (\lambda > 0)$ . 过  $A$ 、 $B$  两点分别作抛物线的切线, 设其交点为  $M$ 。

(I) 证明  $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{AB}$  为定值;

(II) 设  $\triangle ABM$  的面积为  $S$ , 写出  $S = f(\lambda)$  的表达式, 并求  $S$  的最小值。

### 2006 年黑龙江高考文科数学真题参考答案

#### 一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	D	D	C	B	B	B	A	C	D	A

#### 二、填空题

(13) 45; (14)  $\frac{1}{3}$ ; (15)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; (16) 25

#### 一. 选择题

(1) 已知向量  $\vec{a} = (4, 2)$ , 向量  $\vec{b} = (x, 3)$ , 且  $\vec{a} // \vec{b}$ , 则  $x =$  ( B )

- (A) 9 (B) 6 (C) 5 (D) 3

解:  $\vec{a} // \vec{b} \Rightarrow 4 \times 3 - 2x = 0$ , 解得  $x = 6$ , 选 B

- (2) 已知集合  $M = \{x | x < 3\}$ ,  $N = \{x | \log_2 x > 1\}$ , 则  $M \cap N = (D)$

- (A)  $\emptyset$  (B)  $\{x | 0 < x < 3\}$  (C)  $\{x | 1 < x < 3\}$  (D)  $\{x | 2 < x < 3\}$

解:  $N = \{x | \log_2 x > 1\} = \{x | x > 2\}$ , 用数轴表示可得答案 D

- (3) 函数  $y = \sin 2x \cos 2x$  的最小正周期是 (D)

- (A)  $2\pi$  (B)  $4\pi$  (C)  $\frac{\pi}{4}$  (D)  $\frac{\pi}{2}$

解析:  $y = \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$  所以最小正周期为  $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ , 故选 D

- (4) 如果函数  $y = f(x)$  的图像与函数  $y' = 3 - 2x$  的图像关于坐标原点对称, 则  $y = f(x)$  的表达式为 (D)

- (A)  $y = 2x - 3$  (B)  $y = 2x + 3$  (C)  $y = -2x + 3$  (D)  $y = -2x - 3$

解: 以  $-y$ ,  $-x$  代替函数  $y' = 3 - 2x$  中的  $x$ ,  $y'$ , 得  $y = f(x)$  的表达式为  $y = -2x - 3$ , 选 D

- (5) 已知  $\triangle ABC$  的顶点 B、C 在椭圆  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  上, 顶点 A 是椭圆的一个焦点, 且椭圆的另外一个焦点在 BC 边上, 则  $\triangle ABC$  的周长是 (C)

- (A)  $2\sqrt{3}$  (B) 6 (C)  $4\sqrt{3}$  (D) 12

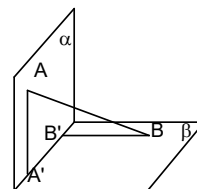
解: (数形结合) 由椭圆的定义椭圆上一点到两焦点的距离之和等于长轴长  $2a$ , 可得  $\triangle ABC$  的周长为  $4a = 4\sqrt{3}$ , 所以选 C

- (6) 已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2 = 7, a_4 = 15$ , 则前 10 项的和  $S_{10} = (B)$

- (A) 100 (B) 210 (C) 380 (D) 400

解:  $d = \frac{a_4 - a_2}{4 - 2} = \frac{15 - 7}{2} = 4$ ,  $a_1 = 3$ , 所以  $S_{10} = 210$ , 选 B

- (7) 如图, 平面  $\alpha \perp$  平面  $\beta$ ,  $A \in \alpha, B \in \beta$ ,  $AB$  与两平面  $\alpha$ 、 $\beta$  所成的角分别为  $\frac{\pi}{4}$  和  $\frac{\pi}{6}$ 。过 A、B 分别作两平面交线的垂线, 垂足为  $A'$ 、



$B'$ , 若  $AB=12$ , 则  $A'B'=(A)$

- (A) 4      (B) 6      (C) 8      (D) 9

解: 连接  $AB'$  和  $A'B$ , 设  $AB=a$ , 可得  $AB$  与平面  $\alpha$  所成的角为  $\angle BAB' = \frac{\pi}{4}$ , 在

$Rt\triangle BAB'$  中有  $AB' = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ , 同理可得  $AB$  与平面  $\beta$  所成的角为  $\angle ABA' = \frac{\pi}{6}$ , 所以

$A'A = \frac{1}{2}a$ , 因此 在  $Rt\triangle AA'B'$  中  $A'B' = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{1}{2}a$ , 所以

$AB:A'B' = a:\frac{1}{2}a = 2:1$ , 故选 A

(8) 已知函数  $f(x) = \ln x + 1 (x > 0)$ , 则  $f(x)$  的反函数为 (B)

(A)  $y = e^{x+1} (x \in R)$       (B)  $y = e^{x-1} (x \in R)$

(C)  $y = e^{x+1} (x > 1)$       (D)  $y = e^{x-1} (x > 1)$

解:  $y = \ln x + 1 (x > 0) \Rightarrow \ln x = y - 1 \Rightarrow x = e^{y-1} (y \in R)$  所以反函数为  $y = e^{x-1} (x \in R)$  故选 B

(9) 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的一条渐近线方程为  $y = \frac{4}{3}x$ , 则双曲线的离心率为 (A)

(A)  $\frac{5}{3}$       (B)  $\frac{4}{3}$       (C)  $\frac{5}{4}$       (D)  $\frac{3}{2}$

解: 双曲线焦点在  $x$  轴, 由渐近线方程可得  $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ , 可得  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{3} = \frac{5}{3}$ , 故选 A

(10) 若  $f(\sin x) = 3 - \cos 2x$ , 则  $f(\cos x) = (C)$

(A)  $3 - \cos 2x$       (B)  $3 - \sin 2x$       (C)  $3 + \cos 2x$       (D)  $3 + \sin 2x$

解:  $f(\sin x) = 3 - \cos 2x = 3 - (1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x + 2$

所以  $f(x) = 2x^2 + 2$ , 因此  $f(\cos x) = 2\cos^2 x + 2 = (2\cos^2 x - 1) + 3 = 3 + \cos 2x$  故选 C

(11) 过点  $(-1, 0)$  作抛物线  $y = x^2 + x + 1$  的切线, 则其中一条切线为 (D)

(A)  $2x + y + 2 = 0$       (B)  $3x - y + 3 = 0$       (C)  $x + y + 1 = 0$       (D)  $x - y + 1 = 0$

解:  $y' = 2x + 1$ , 设切点坐标为  $(x_0, y_0)$ , 则切线的斜率为  $2x_0 + 1$ , 且  $y_0 = x_0^2 + x_0 + 1$

于是切线方程为  $y - x_0^2 - x_0 - 1 = (2x_0 + 1)(x - x_0)$ , 因为点  $(-1, 0)$  在切线上, 可解得

$x_0 = 0$  或  $-4$ , 代入可验证 D 正确。选 D

(12) 5 名志愿者分到 3 所学校支教, 每个学校至少去一名志愿者, 则不同的分派方法共有 (A)

(A) 150 种 (B) 180 种 (C) 200 种 (D) 280 种

解: 人数分配上有两种方式即 1, 2, 2 与 1, 1, 3

若是 1, 2, 2, 则有  $\frac{C_5^3 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} \times A_3^3 = 60$  种, 若是 1, 1, 3, 则有  $\frac{C_5^1 C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \times A_3^3 = 90$  种

所以共有 150 种, 选 A

## 第 II 卷

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分, 把答案填在横线上。

(13) 在  $(x^4 + \frac{1}{x})^{10}$  的展开式中常数项是 45。(用数字作答)

解:  $T_{r+1} = C_{10}^r (x^4)^{10-r} (\frac{1}{x})^r = C_{10}^r x^{40-5r}$  要求常数项, 即  $40-5r=0$ , 可得  $r=8$  代入通项公式可

得  $T_{r+1} = C_{10}^8 = C_{10}^2 = 45$

(14) 圆  $O_1$  是以  $R$  为半径的球  $O$  的小圆, 若圆  $O_1$  的面积  $S_1$  和球  $O$  的表面积  $S$  的比为

$S_1 : S = 2 : 9$ , 则圆心  $O_1$  到球心  $O$  的距离与球半径的比  $OO_1 : R = \underline{1 : 3}$ 。

解: 设圆  $O_1$  的半径为  $r$ , 则  $S_1 = \pi r^2$ ,  $S = 4\pi R^2$ , 由  $S_1 : S = 2 : 9$  得  $r : R = 2\sqrt{2} : 3$

又  $r^2 + OO_1^2 = R^2$ , 可得  $OO_1 : R = 1 : 3$

(15) 过点  $(1, \sqrt{2})$  的直线  $l$  将圆  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  分成两段弧, 当劣弧所对的圆心角最小时,

直线  $l$  的斜率  $k = \underline{\quad}$ 。

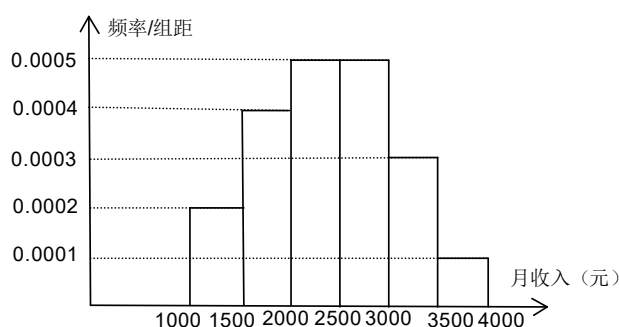
解: (数形结合) 由图形可知点  $A(1, \sqrt{2})$  在圆  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  的内部, 圆心为  $O(2, 0)$  要使得

劣弧所对的圆心角最小, 只能是直线  $l \perp OA$ , 所以  $k_l = -\frac{1}{k_{OA}} = -\frac{1}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(16) 一个社会调查机构就某地居民的月收入调查了 10000 人, 并根据所得数据画了样本的频率分布直方图 (如下图)。为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系, 要从这 10000 人中再用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查, 则在  $[2500, 3000)$  (元) 月收入段应抽出\_\_\_\_\_人。

解: 由直方图可得  $[2500, 3000)$  (元) 月收入段共有  $10000 \times 0.0005 \times 500 = 2500$  人

$$\text{按分层抽样应抽出 } 2500 \times \frac{100}{10000} = 25 \text{ 人}$$



### 三、解答题

17、解: (1) 由  $\cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  得  $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\sin A = \sin(180^\circ - 45^\circ - C) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos C + \sin C) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

由正弦定理知  $BC = \frac{AC}{\sin B} \cdot \sin A = \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = 3\sqrt{2}$

(2)  $AB = \frac{AC}{\sin B} \cdot \sin C = \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 2$

$$BD = \frac{1}{2} AB = 1$$

由余弦定理知

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC \cos B} \\ &= \sqrt{1 + 18 - 2 \cdot 1 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

(18) 解: 设  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 由  $S_4 = 1, S_8 = 17$  知  $q \neq 1$ , 所以得

$$\frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1} = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = 17 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

由①、②式得

$$\text{整理得 } \frac{q^8 - 1}{q^4 - 1} = 17$$

$$\text{解得 } q^4 = 16$$

所以  $q = 2$  或  $q = -2$

$$\text{将 } q = 2 \text{ 代入①式得 } a_1 = \frac{1}{15},$$

$$\text{所以 } a = \frac{2^{n-1}}{15}$$

$$\text{将 } q = -2 \text{ 代入①式得 } a_1 = -\frac{1}{5},$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{(-1)^n \times 2^{n-1}}{5}$$

19 解：设  $A_i$  表示事件“第二箱中取出  $i$  件二等品”， $i = 0, 1$ ；

$B_i$  表示事件“第三箱中取出  $i$  件二等品”， $i = 0, 1, 2$ ；

(1) 依题意所求的概率为

$$P_i = P(A_1 \cdot B_0) + P(A_0 \cdot B_1) = P(A_1)P(B_0) + P(A_0)P(B_1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} + \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2 \cdot C_5^2} = \frac{12}{25}$$

$$(2) \text{解法一：所求的概率为 } P_2 = 1 - P(A_0 \cdot B_0) - P_1 = 1 - \frac{C_4^2 \cdot C_3^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} - \frac{12}{25} = \frac{7}{50}$$

解法二：所求的概率为

$$\begin{aligned} P_2 &= P(A_1 \cdot B_1) + P(A_0 \cdot B_2) + P(A_1 \cdot B_2) \\ &= P(A_1)P(B_1) + P(A_0)P(B_2) + P(A_1)P(B_2) \\ &= \frac{C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2 \cdot C_5^2} + \frac{C_4^2 \cdot C_2^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} + \frac{C_4^1 \cdot C_2^2}{C_5^2 \cdot C_5^2} = \frac{17}{50} \end{aligned}$$

20. 解法一：

(I) 设  $O$  为  $AC$  中点, 连接  $EO, BO$ , 则  $EO \parallel \frac{1}{2}C_1C$ , 又  $C_1C \parallel B_1B$ , 所以  $EO \parallel DB$ ,  $EOBD$

为平行四边形,  $ED \parallel OB$ . .....2分

$\because AB=BC, \therefore BO \perp AC$ ,

又平面  $ABC \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ,  $BO \subset$  面  $ABC$ , 故  $BO \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ,

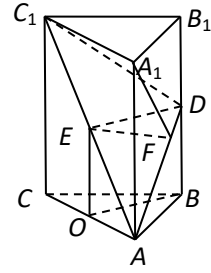
$\therefore ED \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ,  $BD \perp AC_1$ ,  $ED \perp CC_1$ ,

$\therefore ED \perp BB_1$ ,  $ED$  为异面直线  $AC_1$  与  $BB_1$  的公垂线. ....6分

(II) 连接  $A_1E$ , 由  $AA_1=AC=\sqrt{2}AB$  可知,  $A_1ACC_1$  为正方形,

$\therefore A_1E \perp AC_1$ , 又由  $ED \perp$  平面  $ACC_1A_1$  和  $ED \subset$  平面  $ADC_1$  知平面

$ADC_1 \perp$  平面  $A_1ACC_1$ ,  $\therefore A_1E \perp$  平面  $ADC_1$ . 作  $EF \perp AD$ , 垂足为  $F$ , 连接  $A_1F$ , 则  $A_1F \perp AD$ ,  $\angle A_1FE$  为二面角  $A_1-AD-C_1$  的平面角.



不妨设  $AA_1=2$ , 则  $AC=2$ ,  $AB=\sqrt{2}ED=OB=1$ ,  $EF=\frac{AE \times ED}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ,

$\tan \angle A_1FE=\sqrt{3}$ ,  $\therefore \angle A_1FE=60^\circ$ .

所以二面角  $A_1-AD-C_1$  为  $60^\circ$ . ....12分

解法二:

(I) 如图, 建立直角坐标系  $O-xyz$ , 其中原点  $O$  为  $AC$  的中点.

设  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $B_1(0, b, 2c)$ .

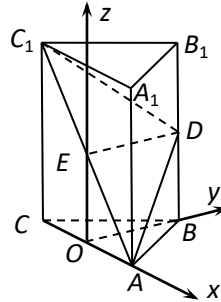
则  $C(-a, 0, 0)$ ,  $C_1(-a, 0, 2c)$ ,  $E(0, 0, c)$ ,  $D(0, b, c)$ . ....3分

$ED=(0, b, 0)$ ,  $BB_1=(0, 0, 2c)$ .

$ED \cdot BB_1=0$ ,  $\therefore ED \perp BB_1$ .

又  $AC_1=(-2a, 0, 2c)$ ,

$ED \cdot AC_1=0$ ,  $\therefore ED \perp AC_1$ , ....6分



所以  $ED$  是异面直线  $BB_1$  与  $AC_1$  的公垂线.

(II) 不妨设  $A(1, 0, 0)$ , 则  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(-1, 0, 0)$ ,  $A_1(1, 0, 2)$ ,

$BC=(-1, -1, 0)$ ,  $AB=(-1, 1, 0)$ ,  $AA_1=(0, 0, 2)$ ,

$BC \cdot AB=0$ ,  $BC \cdot AA_1=0$ , 即  $BC \perp AB$ ,  $BC \perp AA_1$ , 又  $AB \cap AA_1=A$ ,

$\therefore BC \perp$  平面  $A_1AD$ .

又  $E(0, 0, 1)$ ,  $D(0, 1, 1)$ ,  $C(-1, 0, 1)$ ,

$EC=(-1, 0, -1)$ ,  $AE=(-1, 0, 1)$ ,  $ED=(0, 1, 0)$ ,

$EC \cdot AE=0$ ,  $EC \cdot ED=0$ , 即  $EC \perp AE$ ,  $EC \perp ED$ , 又  $AE \cap ED=E$ ,

$\therefore EC \perp$  面  $C_1AD$ . ....10分

$\cos \langle EC, BC \rangle = \frac{EC \cdot BC}{|EC| \cdot |BC|} = \frac{1}{2}$ , 即得  $EC$  和  $BC$  的夹角为  $60^\circ$ .

所以二面角  $A_1-AD-C_1$  为  $60^\circ$ . ....12分

(21) 解: 由  $f(x)$  为二次函数知  $a \neq 0$

$$\text{令 } f(x) = 0 \text{ 解得其两根为 } x_1 = \frac{1}{a} - \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}, x_2 = \frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}}$$

由此可知  $x_1 < 0, x_2 > 0$

(i) 当  $a > 0$  时,  $A = \{x | x < x_1\} \cup \{x | x > x_2\}$

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ 的充要条件是 } x_2 < 3, \text{ 即 } \frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} < 3 \text{ 解得 } a > \frac{6}{7}$$

(ii) 当  $a < 0$  时,  $A = \{x | x_1 < x < x_2\}$

$$A \cap B \neq \emptyset \text{ 的充要条件是 } x_2 > 1, \text{ 即 } \frac{1}{a} + \sqrt{2 + \frac{1}{a^2}} > 1 \text{ 解得 } a < -2$$

综上, 使  $A \cap B = \emptyset$  成立的  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -2) \cup (\frac{6}{7}, +\infty)$

22. 解: (I) 由已知条件, 得  $F(0, 1), \lambda > 0$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ . 由  $AF = \lambda FB$ ,

$$\text{即得 } (-x_1, 1 - y_1) = \lambda(x_2, y_2 - 1),$$

$$\begin{cases} -x_1 = \lambda x_2 & \text{①} \\ 1 - y_1 = \lambda(y_2 - 1) & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{将①式两边平方并把 } y_1 = \frac{1}{4}x_1^2, y_2 = \frac{1}{4}x_2^2 \text{ 代入得 } y_1 = \lambda^2 y_2 \quad \text{③}$$

$$\text{解②、③式得 } y_1 = \lambda, y_2 = \frac{1}{\lambda}, \text{ 且有 } x_1 x_2 = -\lambda x_2^2 = -4\lambda y_2 = -4,$$

$$\text{抛物线方程为 } y = \frac{1}{4}x^2, \text{ 求导得 } y' = \frac{1}{2}x.$$

所以过抛物线上  $A, B$  两点的切线方程分别是

$$y = \frac{1}{2}x_1(x - x_1) + y_1, y = \frac{1}{2}x_2(x - x_2) + y_2,$$

$$\text{即 } y = \frac{1}{2}x_1 x - \frac{1}{4}x_1^2, y = \frac{1}{2}x_2 x - \frac{1}{4}x_2^2.$$

$$\text{解出两条切线的交点 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 x_2}{4}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, -1\right). \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } FM \cdot AB = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, -2\right) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) - 2\left(\frac{1}{4}x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^2\right) = 0$$

所以  $FM \cdot AB$  为定值, 其值为 0.  $\dots\dots 7$  分

(II) 由 (I) 知在  $\triangle ABM$  中,  $FM \perp AB$ , 因而  $S = \frac{1}{2}|AB| |FM|$ .

$$\begin{aligned}
|FM| &= \sqrt{(\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + 2) + (-2)} = \sqrt{\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + 4} \\
&= \sqrt{y_1 + y_2 + \frac{1}{2} \times (-4) + 4} \\
&= \sqrt{\lambda + \frac{1}{\lambda} + 2} = \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.
\end{aligned}$$

因为  $|AF|$ 、 $|BF|$  分别等于  $A$ 、 $B$  到抛物线准线  $y = -1$  的距离，所以

$$|AB| = |AF| + |BF| = y_1 + y_2 + 2 = \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 = (\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}})^2.$$

于是 
$$S = \frac{1}{2} |AB| |FM| = (\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}})^3,$$

由  $\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \geq 2$  知  $S \geq 4$ ，且当  $\lambda = 1$  时， $S$  取得最小值 4.