2011年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

（湖南卷）

参考公式（1）柱体体积公式$V=Sh$，其中S为底面面积，h为高．

（2）球的体积公式$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中R为球的半径．

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

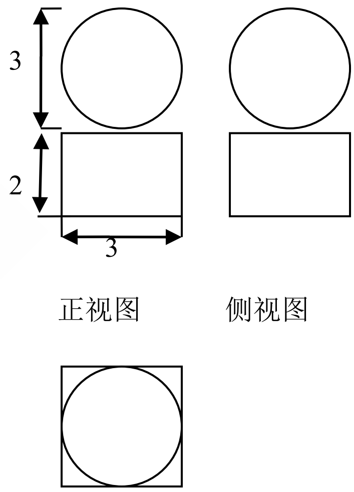
1．设全集U=M∪N=｛1,2,3,4,5｝,M∩C_uN=｛2,4｝,则N=

A．{1,2,3}　　B．{1,3,5}　　C．{1,4,5}　　D．{2,3,4}

2．若$a,b\in R$，i为虚数单位，且$(a+i)i=b+i$则

A．$a=1$，$b=1$　　B．$a=-1,b=1$

C．$a=1,b=-1$　　D．$a=-1,b=-1$



正视图　　侧视图

俯视图

图1

3．“$x>1$”是“$|x|>1$”的

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分又不必要条件

4．设图1是某几何体的三视图，则该几何体的体积为

A．$9\pi+42$　　B．$36\pi+18$

C．$\frac{9}{2}\pi+12$　　D．$\frac{9}{2}\pi+18$

5．通过随机询问110名性别不同的大学生是否爱好某项运动，得到如下的列联表：

	男	女	总计
爱好	40	20	60
不爱好	20	30	50
总计	60	50	110

由$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+d)(c+d)(a+c)(b+d)}$算得，$K^2=\frac{110\times(40\times30-20\times20)^2}{60\times50\times60\times50}\approx7.8$

附表：

$p(K^2\ge k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

参照附表，得到的正确结论是

A．有99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”

B．有99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别无关”

C．在犯错误的概率不超过0.1%的前提下，认为“爱好该项运动与性别有关”

D．在犯错误的概率不超过0.1%的前提下，认为“爱好该项运动与性别无关”

6．设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1(a>0)$的渐近线方程为$3x\pm 2y=0$，则a的值为

A．4　　　　B．3　　　　C．2　　　　D．1

7．曲线$y=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{1}{2}$在点M（$\dfrac{\pi}{4}$，0）处的切线的斜路为

A．$-\dfrac{1}{2}$　　　　B．$\dfrac{1}{2}$　　　　C．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8．已知函数$f(x)=e^x-1,g(x)=-x^2+4x-3$，若有$f(a)=g(b)$，则b的取值范围为

A．$\left[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]$　B．$\left[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]$　C．$[1,3]$　D．$(1,3)$

二、填空题：本大题共8小题，考生作答7小题，每小题5分，共35分，把答案填在答题卡中对应题号后的横线上.

（一）选做题（请考生在9、10两题中任选一题作答，如果全做，则按前一题记分）

9．在直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数）.在极坐标系（与直角坐标系xOy取相同的长度单位，且以原点O为极点，以x轴正半轴为极轴）中，曲线C_2的方程为$\rho\left(\cos\theta-\sin\theta\right)+1=0$，则$C_1$与$C_2$的交点个数为___

10．已知某试验范围为[10，90]，若用分数法进行4次优选试验，则第二次试点可以是_____

（二）必做题（11～16题）

11．若执行如图2所示的框图，输入$x_1=1$，$x_2=2,x_3=4,x_4=8$则输出的数等于_____

12．已知f（x）为奇函数，g（x）=f（x）+9，g（-2）=3，则f（2）=_________.

13．设向量a，b满足|a|=2$\sqrt{5}$，b=（2，1），且a与b的方向相反，则a的坐标为________.

14．设$m>1$,在约束条件$\begin{cases}y\ge x\\ y\le mx\\ x+y\le 1\end{cases}$下，目标函数$z=x+5y$的最大值为4，则$m$的值为___.

15．已知圆$C:x^2+y^2=12$,直线$l:4x+3y=25.$

（1）圆C的圆心到直线l的距离为____ .

（2）圆C上任意一点A到直线l的距离小于2的概率为____.

16．给定$k\in N^*$，设函数$f:N^*\to N^*$满足：对于任意大于k的正整数n，$f(n)=n-k$

（1）设$k=1$，则其中一个函数f在$n=1$处的函数值为______；

（2）设$k=4$，且当$n\le 4$时，$2\le f(n)\le 3$，则不同的函数f的个数为______.

三、解答题：本大题共6小题，共75分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17．（本小题满分12分）

在△ABC中，角A,B,C所对的边分别为a，b，c，且满足c sinA=acosC．

（I）求角C的大小；

（II）求$\sqrt{3}$ sinA-cos（B+$\frac{\pi}{4}$）的最大值，并求取得最大值时角A、B的大小.

18．（本小题满分12分）

某河流上的一座水力发电站，每年六月份的发电量Y（单位：万千瓦时）与该河上游在六月份是我降雨量X（单位：毫米）有关，据统计，当X=70时，Y=460；X每增加10，Y增加5．已知近20年X的值为：140, 110, 160, 70, 200, 160, 140, 160, 220, 200, 110, 160, 160, 200, 140, 110, 160, 220, 140, 160.

（I）完成如下的频率分布表

近20年六月份降雨量频率分布表

降雨量	70	110	140	160	200	220
频率	$\frac{1}{20}$		$\frac{4}{20}$			$\frac{2}{20}$

（II）假定今年六月份的降雨量与近20年六月份降雨量的分布规律相同，并将频率是为概率，求今年六月份该水力发电站的发电量低于490（万千瓦时）或超过530（万千瓦时）的概率.

19．（本小题满分12分）

如图3，在圆锥PO中，已知$PO=\sqrt{2}$,$\odot O$的直径

$AB=2$,点C在$\overset{\frown}{AB}$上,且$\angle CAB=30^\circ$,D为AC

的中点.

（I）证明：$AC\perp$平面POD；

（II）求直线OC和平面PAC所成角的正弦值.

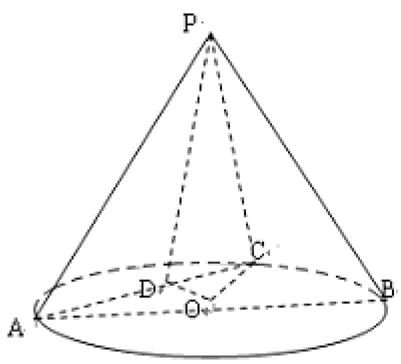


图3

20．（本小题满分13分）

某企业在第1年初购买一台价值为120万元的设备M，M的价值在使用过程中逐年减少．从第2年到第6年，每年初M的价值比上年初减少10万元；从第7年开始，每年初M的价值为上年初的75%．

（I）求第n年初M的价值a_n的表达式；

（II）设$A_n=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$，若$A_n$大于80万元，则$M$继续使用，否则须在第$n$年初对$M$更新，证明：须在第9年初对$M$更新．

21．（本小题满分13分）

已知平面内一动点P到点$F(1,0)$的距离与点P到y轴的距离的差等于1．

（I）求动点P的轨迹C的方程；

（II）过点F作两条斜率存在且互相垂直的直线l_1,l_2，设l_1与轨迹C相交于点A,B，l_2与轨迹C相交于点D,E，求$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{EB}$的最小值.

22．（本小题满分13分）

设函数$f(x)=x-\dfrac{1}{x}-a\ln x(a\in R)$.

（I）讨论函数$f(x)$的单调性.

（II）若$f(x)$有两个极值点x_1,x_2，记过点$A(x_1,f(x_1)),\ B(x_2,f(x_2))$的直线斜率为$k$.问：是否存在$a$，使得$k=2-a$？若存在，求出$a$的值；若不存在，请说明理由.

2011年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学试题卷（文史类）参考答案

一、选择题(共8小题，每小题5分，满分40分)

1、(2011•湖南)设全集$U=M\cup N=\{1，2，3，4，5\}$，$M\cap C_uN=\{2，4\}$，则$N=$(　　)

A、{1，2，3}　　　　B、{1，3，5}

C、{1，4，5}　　　　D、{2，3，4}

考点：交、并、补集的混合运算。

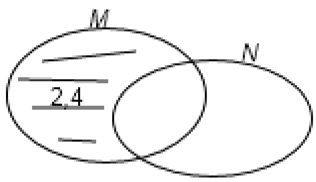
分析：利用集合间的故选，画出两个集合的韦恩图，结合韦恩图求出集合N.

解答：解：∵全集$U=M\cup N=\{1，2，3，4，5\}$，$M\cap C_uN=\{2，4\}$，

∴集合M，N对应的韦恩图为

所以N={1，3，5}

故选B



点评：本题考查在研究集合间的关系时，韦恩图是常借用的工具．考查数形结合的数学思想方法．

2、(2011•湖南)若a，$b\in R$，i为虚数单位，且$(a+i)i=b+i$则(　　)

A、$a=1$，$b=1$　　B、$a=-1$，$b=1$

C、$a=1$，$b=-1$　　D、$a=-1$，$b=-1$

考点：复数相等的充要条件。

专题：计算题。

分析：根据所给的关于复数的等式，整理出等式左边的复数乘法运算，根据复数相等的充要条件，即实部和虚部分别相等，得到a，b的值．

解答：解：∵$(a+i)i=b+i$，

∴$ai-1=b+i$，

∴$a=1$，$b=-1$，

故选C.

点评：本题考查复数的乘法运算，考查复数相等的条件，是一个基础题，这种题目一般出现在试卷的前几个题目中.

3、(2011•湖南)“$x>1$”是“$|x|>1$”的(　　)

A、充分不必要条件　　　B、必要不充分条件

C、充分必要条件　　D、既不充分又不必要条件

考点：充要条件。

分析：解绝对值不等式，进而判断“$x>1$”⇒“$|x|>1$”与“$|x|>1$”⇒“$x>1$”的真假，再根据充要条件的定义即可得到答案.

解答：解：当“$x>1$”时，“$|x|>1$”成立

即“$x>1$”⇒“$|x|>1$”为真命题

而当“$|x|>1$”时，$x<-1$或$x>1$，即“$x>1$”不一定成立

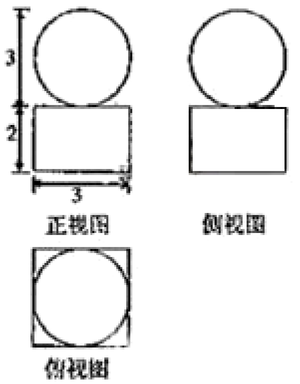
即“$|x|>1$”⇒“$x>1$”为假命题

∴“$x>1$”是“$|x|>1$”的充分不必要条件

故选A

点评：本题考查的知识点是充要条件，其中根据绝对值的定义，判断“$x>1$”⇒“$|x|>1$”与“$|x|>1$”⇒“$x>1$”的真假，是解答本题的关键.

4、(2011•湖南)设如图是某几何体的三视图，则该几何体的体积为(　　)



A、$9\pi+42$　　B、$36\pi+18$　C、$\dfrac{9}{2}\pi+12$　　D、$\dfrac{9}{2}\pi+18$

考点：由三视图求面积、体积。

专题：计算题。

分析：由三视图可知，下面是一个底面边长是3的正方形且高是2的一个四棱柱，上面是一个球，球的直径是3，该几何体的体积是两个体积之和，分别做出两个几何体的体积相加.

解答：解：由三视图可知，几何体是一个简单的组合体，下面是一个底面边长是3的正方形且高是2的一个四棱柱，上面是一个球，球的直径是3，该几何体的体积是两个体积之和，

四棱柱的体积3×3×2=18，

球的体积是$\frac{4}{3}\times\pi(\frac{3}{2})^3=\frac{9}{2}\pi$，

∴几何体的体积是18+$\frac{9}{2}\pi$，

故选D.

点评：本题考查由三视图求面积和体积，考查球体的体积公式，考查四棱柱的体积公式，本题解题的关键是由三视图看出几何图形，是一个基础题.

5、(2011•湖南)通过随机询问110名性别不同的大学生是否爱好某项运动，得到如下的列联表：

	男	女	总计
爱好	40	20	60
不爱好	20	30	50
总计	60	50	110

由$k^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+d)(c+d)(a+c)(b+d)}$算得，$k^2=\frac{110\times(40\times30-20\times20)^2}{60\times50\times60\times50}\approx7.8$

附表：

$p(k^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

参照附表，得到的正确结论是(　　)

A、有99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”

B、有99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别无关”

C、在犯错误的概率不超过0.1%的前提下，认为“爱好该项运动与性别有关”

D、在犯错误的概率不超过0.1%的前提下，认为“爱好该项运动与性别五关”

考点：独立性检验的应用。

专题：计算题。

分析：根据条件中所给的观测值，同题目中节选的观测值表进行检验，得到观测值对应的结果，得到结论有99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”.

解答：解：由题意知本题所给的观测值，$k^2=\dfrac{110\times(40\times30-20\times20)^2}{60\times50\times60\times50}\approx7.8$

∵7.8＞6.635，

∴这个结论有0.01=1%的机会说错，

即有99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”

故选A．

点评：本题考查独立性检验的应用，考查对于观测值表的认识，这种题目一般运算量比较大，主要要考查运算能力，本题有所创新，只要我们看出观测值对应的意义就可以，是一个基础题．

6、(2011•湖南)设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1(a>0)$的渐近线方程为$3x\pm2y=0$，则$a$的值为(　　)

A、4　　　　B、3

C、2　　　　D、1

考点：双曲线的简单性质。

专题：计算题。

分析：先求出双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1(a>0)$的渐近线方程，再求$a$的值．

解答：解：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1(a>0)$的渐近线为$y=\pm\dfrac{3}{a}x$，

∵$y=\pm\dfrac{3}{a}x$与$3x\pm2y=0$重合，

∴$a=2$．

故选C．

点评：本题考查双曲线的性质和应用，解题时要注意公式的灵活运用．

7、(2011•湖南)曲线$y=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{1}{2}$在点$M(\dfrac{\pi}{4}$，0)处的切线的斜率为(　　)

A、$-\dfrac{1}{2}$　　　　B、$\dfrac{1}{2}$

C、$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　　D、$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

考点：利用导数研究曲线上某点切线方程。

专题：计算题。

分析：先求出导函数，然后根据导数的几何意义求出函数$f(x)$在$x=\frac{\pi}{4}$处的导数，从而求出切线的斜率．

解答：解：$\because y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\frac{1}{2}$

$\therefore y'=\frac{\cos x(\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)\sin x}{(\sin x+\cos x)^2}$

$=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$

$y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$

故选B．

点评：本题主要考查了导数的几何意义，以及导数的计算，同时考查了计算能力，属于基础题．

8、(2011•湖南)已知函数$f(x)=e^x-1$，$g(x)=-x^2+4x-3$，若有$f(a)=g(b)$，则b的取值范围为(　　)

A、$[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$　　　B、$(2-\sqrt{2}，2+\sqrt{2})$

C、$[1，3]$　　　D、$(1，3)$

考点：函数的零点与方程根的关系。

专题：计算题。

分析：利用$f(a)=g(b)$，整理等式，利用指数函数的性质建立不等式求解即可．

解答：解：$\because f(a)=g(b)$，

$\therefore e^a-1=-b^2+4b-3$

$\therefore -b^2+4b-2=e^a>0$

即$b^2-4b+2<0$，求得$2-\sqrt{2}<b<2+\sqrt{2}$

故选B

点评：本题主要考查了函数的零点与方程根的关系．

二、填空题(共8小题，每小题5分，满分35分)

9、(2011•湖南)在直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\alpha\\y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数)在极坐

标系(与直角坐标系xOy取相同的长度单位，且以原点O为极点，以x轴正半轴为极轴)中，曲线C_2的方程为$p(\cos\theta - \sin\theta)+1=0$，则$C_1$与$C_2$的交点个数为___2___.

考点：简单曲线的极坐标方程；直线的参数方程；椭圆的参数方程。

专题：计算题。

分析：先根据同角三角函数的关系消去参数α可求出曲线C_1的普通方程，然后利用极坐标公式$\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$进行化简即可求出曲线C_2普通方程，最后利用直角坐标方程判断C_1与C_2的交点个数即可.

解答：解：由曲线C_2的方程为$p(\cos\theta - \sin\theta)+1=0$，∴$x-y+1=0$．即$y=x+1$；

将曲线C_1的参数方程化为普通方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

∴消去y整理得：$7x^2+8x-8=0$.

△＞0，∴此方程有两个不同的实根，

故C_1与C_2的交点个数为2.

故答案为2.

点评：本题主要考查椭圆的参数方程、简单曲线的极坐标方程，求直线与椭圆的交点个数，考查运算求解能力及转化的思想，属于基础题.

10、(2011•湖南)【选做】已知某试验范围为[10，90]，若用分数法进行4次优选试验，则第二次试点可以是___40或60(只写出其中一个也正确)___.

考点：分数法的最优性。

分析：由题知试验范围为[10，90]，区间长度为80，故可把该区间等分成8段，利用分数法选取试点进行计算.

解答：解：由已知试验范围为[10，90]，可得区间长度为80，将其等分8段，

利用分数法选取试点：$x_1=10+\frac{5}{8}\times(90-10)=60$，$x_2=10+90-60=40$，

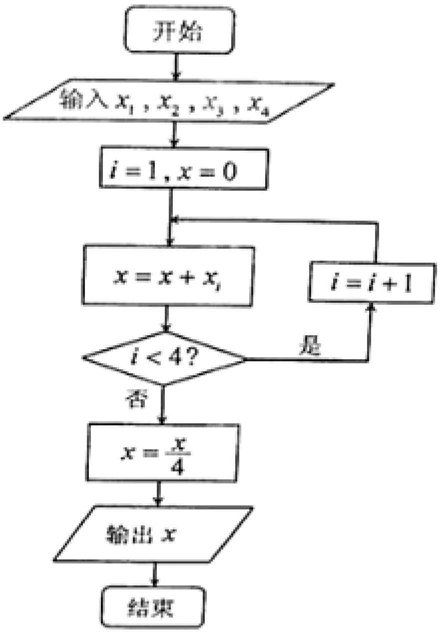
由对称性可知，第二次试点可以是40或60.

故答案为：40或60.

点评：本题考查的是分数法的简单应用．一般地，用分数法安排试点时，可以分两种情况考虑：(1)可能的试点总数正好是某一个(F_n-1)．(2)所有可能的试点总数大于某一$(Fn-1)$，而小于$(F_{n+1}-1)$.

11、(2011•湖南)若执行如图所示的框图，输入$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=4$，$x_4=8$则输出的数等于$\frac{15}{4}$

.



考点：循环结构。

专题：计算题；阅读型。

分析：先根据流程图分析出该算法的功能，然后求出所求即可．

解答：解：该算法的功能是求出四个数的平均数

故输出的数$=\frac{1+2+4+8}{4}=\frac{15}{4}$

故答案为：$\frac{15}{4}$

点评：根据流程图计算运行结果是算法这一模块的重要题型，处理的步骤一般为：分析流程图，从流程图中即要分析出计算的类型，又要分析出参与计算的数据建立数学模型，根据第一步分析的结果，选择恰当的数学模型解模．

12、(2011•湖南)已知$f(x)$为奇函数，$g(x)=f(x)+9$，$g(-2)=3$，则$f(2)=$__6__．

考点：函数奇偶性的性质。

专题：计算题。

分析：将等式中的x用2代替；利用奇函数的定义及$g(-2)=3$，求出$f(2)$的值．

解答：解：$\because g(-2)=f(-2)+9$

$\because f(x)$为奇函数

$\therefore f(-2)=-f(2)$

$\therefore g(-2)=-f(2)+9$

∵$g(-2)=3$

所以$f(2)=6$

故答案为6

点评：本题考查奇函数的定义：对于定义域中的任意x都有$f(-x)=-f(x)$

13、(2011•湖南)设向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2\sqrt{5}$，$\vec{b}=(2，1)$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相反，则$\vec{a}$的坐标为__(－4，－2)__.

考点：平面向量共线(平行)的坐标表示；平面向量数量积的坐标表示、模、夹角。

专题：计算题。

分析：要求向量$\vec{a}$的坐标，我们可以高设出向量$\vec{a}$的坐标，然后根据$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相反，及$|\vec{a}|=2\sqrt{5}$，我们构造方程，解方程得到向量$\vec{a}$的坐标.

解答：解：设$\vec{a}=(x，y)$

∵$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相反，

故$\vec{a}=\lambda\vec{b}=(2\lambda，\lambda)(\lambda<0)$

又∵$|\vec{a}|=2\sqrt{5}$，

则$x^2+y^2=20$

∴$5\lambda^2=20$

解得$\lambda=-2$

则设$\vec{a}=(-4，-2)$

故答案为$(-4，-2)$

点评：本题考察的知识点是平面向量共线(平行)的坐标表示，平面向量模的计算，其中根据$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相反，给出向量$\vec{a}$的横坐标与纵坐标之间的关系是解答本题的关键.

14、(2011•湖南)设$m>1$，在约束条件$\begin{cases} y\geq x \\ y\leq mx \\ x+y\leq 1 \end{cases}$下，目标函数$z=x+5y$的最大值为4，则$m$的值为__3__.

考点：简单线性规划的应用。

专题：计算题；数形结合。

分析：根据$m>1$，我们可以判断直线$y=mx$的倾斜角位于区间$(\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2})$上，由此我们不难判断出满足约束条件$\begin{cases} y\geq x \\ y\leq mx \\ x+y\leq 1 \end{cases}$的平面区域的形状，再根据目标函数$Z=X+5y$在直线$y=mx$与直线$x+y=1$交点处取得最大值，由此构造出关于$m$的方程，解方程即可求出$m$的取值范围.

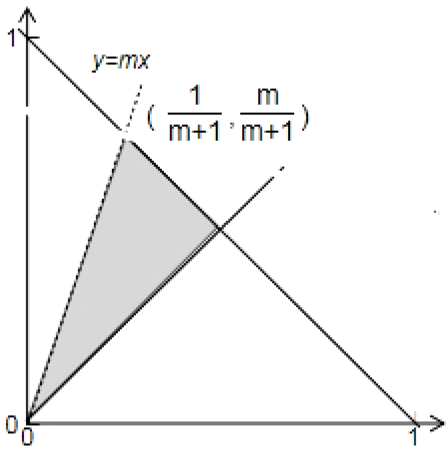
解答：解：满足约束条件$\begin{cases} y\geq x \\ y\leq mx \\ x+y\leq 1 \end{cases}$的平面区域如下图所示：

当$x=\frac{1}{m+1}$，$y=\frac{m}{m+1}$时，

目标函数$z=x+5y$取最大值为4，即$\frac{1+5m}{m+1}=4$；

解得$m=3$

故答案为3



点评：本题考查的知识点是简单线性规划的应用，其中判断出目标函数$Z=X+my$在$(\frac{1}{m+1},\frac{m}{m+1})$点取得最大值，并由此构造出关于$m$的方程是解答本题的关键.

15、(2011•湖南)已知圆C：$x^2+y^2=12$，直线l：$4x+3y=25$.

(1)圆C的圆心到直线l的距离为__5__；

(2)圆C上任意一点A到直线l的距离小于2的概率为$\frac{1}{6}$.

考点：点到直线的距离公式；几何概型；直线与圆的位置关系。

专题：计算题。

分析：(1)根据所给的圆的标准方程，看出圆心，根据点到直线的距离公式，代入有关数据做出点到直线的距离.

(2)本题是一个几何概型，试验发生包含的事件是从这个圆上随机的取一个点，对应的圆上整个圆周的弧长，根据题意做出符合条件的弧长对应的圆心角是60°，根据几何概型概率公式得到结果.

解答：解：(1)由题意知圆$x^2+y^2=12$的圆心是(0，0)，

圆心到直线的距离是$d=\frac{25}{\sqrt{3^2+4^2}}=5$，

(2)由题意知本题是一个几何概型，

试验发生包含的事件是从这个圆上随机的取一个点，对应的圆上整个圆周的弧长，

满足条件的事件是到直线l的距离小于2，过圆心做一条直线交直线l与一点，

根据上一问可知圆心到直线的距离是5，

在这条垂直于直线l的半径上找到圆心的距离为3的点做半径的垂线，

根据弦心距，半径，弦长之间组成的直角三角形得到符合条件的弧长对应的圆心角是60°

根据几何概型的概率公式得到$P=\frac{60°}{360°}=\frac{1}{6}$

故答案为：5；$\frac{1}{6}$

点评：本题考查点到直线的距离，考查直线与圆的位置关系，考查几何概型的概率公式，本题是一个基础题，运算量不大.

16、(2011•湖南)给定$k\in N^*$，设函数f：$N^*\to N^*$满足：对于任意大于k的正整数n：$f(n)=n-k$

(1)设$k=1$，则其中一个函数$f(x)$在$n=1$处的函数值为__a(a为正整数)__；

(2)设$k=4$，且当$n\leqslant 4$时，$2\leqslant f(n)\leqslant 3$，则不同的函数$f$的个数为__16__.

考点：函数的概念及其构成要素；分步乘法计数原理。

专题：计算题；探究型。

分析：题中隐含了对于小于或等于K的正整数n，其函数值也应该是一个正整数，但是对应法则由题意而定

(1)$n=k=1$，题中给出的条件“大于k的正整数n”不适合，但函数值必须是一个正整数，故$f(1)$的值是一个常数(正整数)；

(2)$k=4$，且$n\leqslant 4$，与条件“大于k的正整数n”不适合，故$f(n)$的值在2、3中任选其一，再由乘法原理可得不同函数的个数.

解答：解：(1)∵$n=1$，$k=1$且$f(1)$为正整数

∴$f(1)=a$(a为正整数)

即$f(x)$在$n=1$处的函数值为 a(a为正整数)

(2)∵$n\leqslant 4$，$k=4f(n)$为正整数且$2\leqslant f(n)\leqslant 3$

∴$f(1)=2$或3 且 $f(2)=2$或3 且 $f(3)=2$或3 且$f(4)=2$或3

根据分步计数原理，可得共$2^4=16$个不同的函数

故答案为(1)a(a为正整数)

(2)16

点评：本题题意有点含蓄，发现题中的隐含条件，是解决本题的关键，掌握映射与函数的概念是本题的难点．

三、解答题(共6小题，满分75分)

17、(2011•湖南)在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且满足$c\sin A=a\cos C$．

(1)求角C的大小；

(2)求$\sqrt{3}\sin A-\cos(B+\frac{\pi}{4})$的最大值，并求取得最大值时角$A$、$B$的大小．

考点：三角函数的恒等变换及化简求值。

专题：计算题。

分析：(1)利用正弦定理化简$c\sin A=a\cos C$．求出$\tan C=1$，得到$C=\frac{\pi}{4}$．

(2)$B=\frac{3\pi}{4}-A$，化简$\sqrt{3}\sin A-\cos(B+\frac{\pi}{4})=2\sin(A+\frac{\pi}{6})$．因为$0<A<\frac{3\pi}{4}$，推出$\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{12}$

求出$2\sin(A+\frac{\pi}{6})$取得最大值2．得到$A=\frac{\pi}{3}$，$B=\frac{5\pi}{12}$

解答：解：(1)由正弦定理得 $\sin C\sin A=\sin A\cos C$，

因为$0<A<\pi$，所以$\sin A>0$．从而$\sin C=\cos C$，

又$\cos C\neq 0$，所以$\tan C=1$，$C=\frac{\pi}{4}$．

(2)有(1)知，$B=\frac{3\pi}{4}-A$，于是$\sqrt{3}\sin A-\cos(B+\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}\sin A-\cos(\pi-A)$

$=\sqrt{3}\sin A+\cos A$

$=2\sin(A+\frac{\pi}{6})$．

因为$0<A<\frac{3\pi}{4}$，所以$\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{12}$

从而当$A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$A=\frac{\pi}{3}$时

$2\sin(A+\frac{\pi}{6})$取得最大值2．

综上所述，$\sqrt{3}\sin A-\cos(B+\frac{\pi}{4})$的最大值为2，此时$A=\frac{\pi}{3}$，$B=\frac{5\pi}{12}$

点评：本题是中档题，考查三角形的有关知识，正弦定理的应用，三角函数的最值，常考题型．

18、(2011•湖南)某河流上的一座水力发电站，每年六月份的发电量Y(单位：万千瓦时)与该河上游在六月份的降雨量X(单位：毫米)有关，据统计，当$X=70$时，$Y=460$；X每增加10，Y增加5．已知近20年X的值为：140，110，160，70，200，160，140，160，220，200，110，160，160，200，140，110，160，220，140，160．

(Ⅰ)完成如下的频率分布表

近20年六月份降雨量频率分布表

降雨量	70	110	140	160	200	220
频率	$\frac{1}{20}$		$\frac{4}{20}$			$\frac{2}{20}$

(Ⅱ)假定今年六月份的降雨量与近20年六月份降雨量的分布规律相同，并将频率是为概率，求今年六月份该水力发电站的发电量低于490(万千瓦时)或超过530(万千瓦时)的概率．

考点：频率分布表；互斥事件的概率加法公式。

专题：应用题；综合题。

分析：(*I*)从所给的数据中数出降雨量为各个值时对应的频数，求出频率，完成频率分布图．

(*II*)将发电量转化为降雨量，利用频率分布表，求出发电量低于490(万千瓦时)或超过530(万千瓦时)的概率．

解答：解：(*I*)在所给数据中，降雨量为110毫米的有3个，为160毫米的有7个，为200毫米的有3个，

故近20年六月份降雨量频率分布表为

降雨量	70	110	140	160	200	220
频率	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$

(*II*)P(“发电量低于490万千瓦时“)

$=P(Y<490或Y>530)=P(X<130或>210)$

$=P(X=70)+P(X=110)+P(X=220)=\frac{1}{20}+\frac{3}{20}+\frac{2}{20}=\frac{3}{10}$

故今年六月份该水利发电站的发电量低于490(万千瓦时)或超过530(万千瓦时)的概率为：

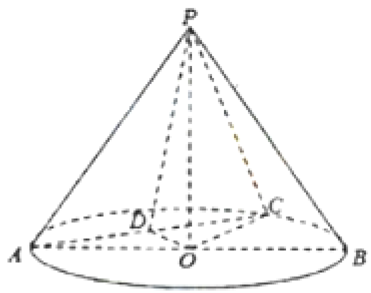
$\frac{3}{10}$

点评：本题考查频率公式：频率$=\frac{频数}{样本容量}$；考查将问题等价转化的能力.

19、(2011•湖南)如图，在圆锥PO中，已知$PO=\sqrt{2}$，⊙OD的直径$AB=2$，点C在$\widehat{AB}$上，且$\angle CAB=30°$，D为AC的中点.

(Ⅰ)证明：$AC\perp$平面POD；

(Ⅱ)求直线OC和平面PAC所成角的正弦值.



考点：直线与平面垂直的判定；二面角的平面角及求法。

专题：计算题；证明题。

分析：(I)由已知易得$AC\perp OD$，$AC\perp PO$，根据直线与平面垂直的判定定理可证

(II)由(I)可证面$POD\perp$平面PAC，由平面垂直的性质考虑在平面POD中过O作$OH\perp PD$于H，则$OH\perp$平面PAC，$\angle OCH$是直线OC和平面PAC所成的角，在$Rt\triangle OHC$中，求解即可

解答：解(I)因为$OA=OC$，D是AC的中点，所以$AC\perp OD$

又$PO\perp$底面⊙O，$AC\subset$底面⊙O

所以$AC\perp PO$，而OD，PO是平面内的两条相交直线

所以$AC\perp$平面POD

(II)由(I)知，$AC\perp$平面POD，又$AC\subset$平面PAC

所以平面$POD\perp$平面PAC

在平面POD中，过O作$OH\perp PD$于H，则$OH\perp$平面PAC

连接CH，则CH是OC在平面上的射影，所以$\angle OCH$是直线OC和平面PAC所成的角

在$Rt\triangle ODA$中，$OD=OA$．$\sin 30°=\frac{1}{2}$

在$Rt\triangle POD$中，$OH=\dfrac{PO\bullet OD}{\sqrt{PO^2+OD^2}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{2+\frac{1}{4}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

在$Rt\triangle OHC$中，$\sin\angle OCH=\dfrac{OH}{OC}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

故直线OC和平面PAC所成的角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

点评：本题主要考查了直线与平面垂直的判定定理的应用，空间直线与平面所成角的求解，考查了运算推理的能力及空间想象的能力

20、(2011•湖南)某企业在第1年初购买一台价值为120万元的设备M，M的价值在使用过程中逐年减少．从第2年到第6年，每年初M的价值比上年初减少10万元；从第7年开始，每年初M的价值为上年初的75%．

(Ⅰ)求第n年初M的价值a_n的表达式；

(Ⅱ)设 $An=\dfrac{a1+a2+\ldots+an}{n}$，若$An$大于80万元，则$M$继续使用，否则须在第$n$年初对$M$更新．证明：须在第9年初对$M$更新．

考点：分段函数的应用；数列与函数的综合。

专题：综合题。

分析：(I)通过对n的分段讨论，得到一个等差数列和一个等比数列，利用等差数列的通项公式及等比数列的通项公式求出第n年初M的价值a_n的表达式；

(II)利用等差数列、等比数列的前n项和公式求出A_n，判断出其两段的单调性，求出两段的最小值，与80比较，判断出须在第9年初对M更新．

解答：解：(I)当$n<6$时，数列$\{a_n\}$是首项为120，公差为－10的等差数列

$a_n=120-10(n-1)=130-10n$

当$n\geqslant 6$时，数列$\{a_n\}$是以a_6为首项，公比为$\dfrac{3}{4}$的等比数列，又$a_6=70$

所以$a_n=70\times(\frac{3}{4})^{n-6}$

因此，第n年初，M的价值a_n的表达式为$a_n=\begin{cases}130\text{-}10n(n\le 6)\\70\times(\frac{3}{4})^{n-6}(n\ge 7)\end{cases}$

(II)设S_n表示数列$\{a_n\}$的前n项和，由等差、等比数列的求和公式得

当$1\leqslant n\leqslant 6$时，$S_n=120n-5n(n-1)$，$A_n=120-5(n-1)=125-5n$

当$n\geqslant 7$时，由于$S_6=570$故

$S_n=S_6+(a_7+a_8+\cdots+a_n)=570+70\times 4\times[1-(\frac{3}{4})^{n-6}]=780-210\times(\frac{3}{4})^{n-6}$ $A_n=\dfrac{780-210\times(\frac{3}{4})^{n-6}}{n}$

因为$\{a_n\}$是递减数列，

所以$\{A_n\}$是递减数列，

又 $A_8=\dfrac{780-210\times(\frac{3}{4})^2}{8}=82\dfrac{47}{64}>80$

$A_9=\dfrac{780-210\times(\frac{3}{4})^3}{9}=76\dfrac{79}{96}<80$

所以须在第9年初对M更新．

点评：本题考查等差数列的通项公式，前n项和公式、考查等比数列的通项公式及前n项和公式、考查分段函数的问题要分到研究．

21、(2011•湖南)已知平面内一动点P到点$F(1，0)$的距离与点P到y轴的距离的差等于1．

(Ⅰ)求动点P的轨迹C的方程；

(Ⅱ)过点F作两条斜率存在且互相垂直的直线l_1，l_2，设l_1与轨迹C相交于点A，B，l_2与轨迹C相交于点D，E，求 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{EB}$ 的最小值．

考点：直线与圆锥曲线的综合问题；向量在几何中的应用；抛物线的定义。

专题：计算题；综合题；压轴题；分类讨论；函数思想；方程思想。

分析：(Ⅰ)设动点P的坐标为$(x，y)$，根据两点间距离公式和点到直线的距离公式，列方程，并化解即可求得动点P的轨迹C的方程；

(Ⅱ)设出直线l_1的方程，理想直线和抛物线的方程，消去y，得到关于x的一元二次方程，利用韦达定理，求出两根之和和两根之积，同理可求出直线l_2的方程与抛物线的交点坐标，代入 $\overrightarrow{AD}\bullet\overrightarrow{EB}$ 利用基本不等式求最值，即可求得其的最小值．

解答：解：(Ⅰ)设动点P的坐标为$(x，y)$，由题意得$\sqrt{(x-1)^2+y^2}-|x|=1$，

化简得$y^2=2x+2|x|$.

当$x\geqslant 0$时，$y^2=4x$；当$x<0$时，$y=0$，

所以动点P的轨迹C的方程为$y^2=4(x\geqslant 0)$和$y=0(x<0)$．

(Ⅱ)由题意知，直线l_1的斜率存在且不为零，设为k，则l_1的的方程为$y=k(x-1)$．

由$\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$，得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$．

设A，B的坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，则$x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$，$x_1x_2=1$．

∵$l_1\perp l_2$，∴直线l_2的斜率为$-\frac{1}{k}$．

设$D(x_3，y_3)$，$E(x_4，y_4)$，则同理可得$x_3+x_4=2+4k^2$，$x_3x_4=1$．

故$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB}=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD})\cdot(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB})=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FB}$

$=|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FD}|\cdot|\overrightarrow{EF}|=(x_1+1)(x_2+1)+(x_3+1)(x_4+1)$

$=x_1x_2+(x_1+x_2)+1+x_3x_4+x_3+x_4+1$

$1+2+\frac{4}{k^2}+1+1+2+4k^2+1=8+4(k^2+\frac{1}{k^2})\geqslant 8+4\times2=16$，

当且仅当$k^2=\frac{1}{k^2}$，即$k=\pm1$时，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EB}$的最小值为16．

点评：此题是个难题．考查代入法求抛物线的方程，以及直线与抛物线的位置关系，同时也考查了学生观察、推理以及创造性地分析问题、解决问题的能力．

22、(2011•湖南)设函数$f(x)=x-\frac{1}{x}-a\ln x(a\in R)$．

(Ⅰ)讨论函数$f(x)$的单调性．

(Ⅱ)若$f(x)$有两个极值点x_1，x_2，记过点$A(x_1，f(x_1))$，$B(x_2，f(x_2))$的直线斜率为k．问：是否存在a，使得$k=2-a$？若存在，求出a的值；若不存在，请说明理由．

考点：利用导数研究函数的单调性；函数在某点取得极值的条件。

专题：计算题；综合题；压轴题；分类讨论。

分析：(Ⅰ)求导，令导数等于零，解方程，跟据$f'(x)f(x)$随x的变化情况即可求出函数的单调区间；

(Ⅱ)假设存在a，使得$k=2-a$，根据(I)利用韦达定理求出直线斜率为k，根据(I)函数的单调性，推出矛盾，即可解决问题．

解答：解：$(I)f(x)$定义域为$(0，+\infty)$，

$f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax+1}{x^2}$，

令$g(x)=x^2-ax+1$，$\triangle=a^2-4$，

①当$-2\leqslant a\leqslant 2$时，$\triangle\leqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

②当$a<-2$时，$\triangle>0$，$g(x)=0$的两根都小于零，在$(0,+\infty)$上，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

③当$a>2$时，$\triangle>0$，$g(x)=0$的两根为$x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

当$0<x<x_1$时，$f'(x)>0$；当$x_1<x<x_2$时，$f'(x)<0$；当$x>x_2$时，$f'(x)>0$；

故$f(x)$分别在$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上单调递增，在(x_1,x_2)上单调递减．

(Ⅱ)由(*I*)知，$a>2$．

因为$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)+\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}-a(\ln x_1-\ln x_2)$，

所以$k=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1x_2}=1+\dfrac{1}{x_1x_2}-a\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

又由(*I*)知，$x_1x_2=1$．于是

$k=2-a\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

若存在a，使得$k=2-a$，则$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=1$，即$\ln x_1-\ln x_2=x_1-x_2$，

亦即$x_2-\dfrac{1}{x_2}-2\ln x_2=0(x_2>1)(*)$

再由(*I*)知，，函数$h(t)=t-\dfrac{1}{t}-2Int$在$(0,+\infty)$上单调递增，

而$x_2>1$，

所以$x_2-\dfrac{1}{x_2}-2Inx_2>1-1-2\ln 1=0$，这与(*)式矛盾，

故不存在a，使得$k=2-a$．

点评：此题是个难题．考查利用导数研究函数的单调性和极值问题，对方程$f'(x)=0$有无实根，有实根时，根是否在定义域内和根大小进行讨论，体现了分类讨论的思想方法，其中问题(*II*)是一个开放性问题，考查了同学们观察、推理以及创造性地分析问题、解决问题的能力．