

2018年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅱ）

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5分) $\frac{1+2i}{1-2i} = (\quad)$

- A. $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ B. $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ C. $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ D. $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

【考点】A5：复数的运算.

【专题】11：计算题；35：转化思想；49：综合法；5N：数系的扩充和复数.

【分析】利用复数的除法的运算法则化简求解即可.

【解答】解： $\frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.

故选：D.

【点评】本题考查复数的代数形式的乘除运算，是基本知识的考查.

2. (5分) 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 3, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ ，则A中元素的个数为 ()

- A. 9 B. 8 C. 5 D. 4

【考点】1A：集合中元素个数的最值.

【专题】32：分类讨论；40：定义法；5J：集合.

【分析】分别令 $x = -1, 0, 1$ ，进行求解即可.

【解答】解：当 $x = -1$ 时， $y^2 \leq 2$ ，得 $y = -1, 0, 1$ ，

当 $x = 0$ 时， $y^2 \leq 3$ ，得 $y = -1, 0, 1$ ，

当 $x = 1$ 时， $y^2 \leq 2$ ，得 $y = -1, 0, 1$ ，

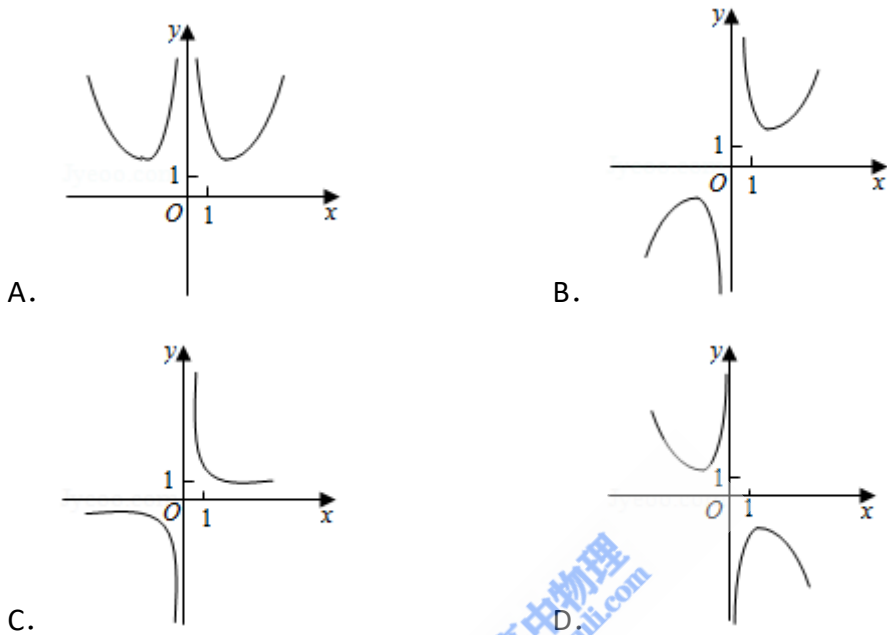
即集合A中元素有9个，

故选：A.

【点评】本题主要考查集合元素个数的判断，利用分类讨论的思想是解决本题

的关键.

3. (5分) 函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为 ()



【考点】3A: 函数的图象与图象的变换; 6B: 利用导数研究函数的单调性.

【专题】33: 函数思想; 4R: 转化法; 51: 函数的性质及应用.

【分析】判断函数的奇偶性, 利用函数的定点的符号的特点分别进行判断即可.

【解答】解: 函数 $f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{(-x)^2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{x^2} = -f(x)$,

则函数 $f(x)$ 为奇函数, 图象关于原点对称, 排除A,

当 $x=1$ 时, $f(1) = e - \frac{1}{e} > 0$, 排除D.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 排除C,

故选: B.

【点评】本题主要考查函数的图象的识别和判断, 利用函数图象的特点分别进行排除是解决本题的关键.

4. (5分) 已知向量 \vec{a} , \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, 则 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) =$ ()
- A. 4 B. 3 C. 2 D. 0

【考点】 91: 向量的概念与向量的模; 90: 平面向量数量积的性质及其运算.

【专题】 11: 计算题; 38: 对应思想; 40: 定义法; 5A: 平面向量及应用.

【分析】 根据向量的数量积公式计算即可.

【解答】 解: 向量 \vec{a} , \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, 则 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 1 = 3$,

故选: B.

【点评】 本题考查了向量的数量积公式, 属于基础题

5. (5分) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为 ()
- A. $y = \pm\sqrt{2}x$ B. $y = \pm\sqrt{3}x$ C. $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$ D. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

【考点】 KC: 双曲线的性质.

【专题】 35: 转化思想; 40: 定义法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 根据双曲线离心率的定义求出 a , c 的关系, 结合双曲线 a , b , c 的关系进行求解即可.

【解答】 解: \because 双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$,

$$\text{则 } \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2},$$

即双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\sqrt{2}x$,

故选: A.

【点评】 本题主要考查双曲线渐近线的求解, 结合双曲线离心率的定义以及渐近线的方程是解决本题的关键.

6. (5分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $BC=1$, $AC=5$, 则 $AB=$ ()
- A. $4\sqrt{2}$ B. $\sqrt{30}$ C. $\sqrt{29}$ D. $2\sqrt{5}$

【考点】HR: 余弦定理.

【专题】11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 58: 解三角形.

【分析】利用二倍角公式求出 C 的余弦函数值, 利用余弦定理转化求解即可.

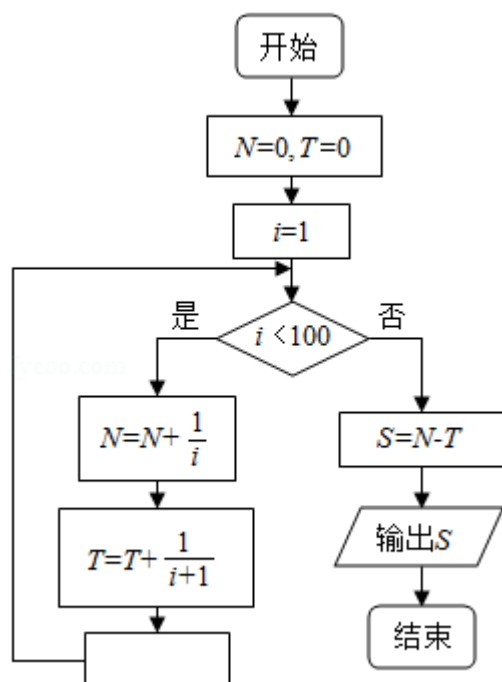
【解答】解: 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos C=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$,

$$BC=1, AC=5, \text{ 则 } AB=\sqrt{BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cos C}=\sqrt{1+25+2\times 1\times 5\times \frac{3}{5}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}.$$

故选: A.

【点评】本题考查余弦定理的应用, 考查三角形的解法以及计算能力.

7. (5分) 为计算 $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$, 设计了如图的程序框图, 则在空白框中应填入 ()



- A. $i=i+1$ B. $i=i+2$ C. $i=i+3$ D. $i=i+4$

【考点】E7: 循环结构; EH: 绘制程序框图解决问题.

【专题】 38: 对应思想; 4B: 试验法; 5K: 算法和程序框图.

【分析】 模拟程序框图的运行过程知该程序运行后输出的 $S=N-T$,
由此知空白处应填入的条件.

【解答】 解: 模拟程序框图的运行过程知,
该程序运行后输出的是

$$S=N-T = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right);$$

累加步长是2, 则在空白处应填入 $i=i+2$.

故选: B.

【点评】 本题考查了循环程序的应用问题, 是基础题.

8. (5分) 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是“每个大于2的偶数可以表示为两个素数的和”, 如 $30=7+23$. 在不大于30的素数中, 随机选取两个不同的数, 其和等于30的概率是 ()

- A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{14}$ C. $\frac{1}{15}$ D. $\frac{1}{18}$

【考点】 CB: 古典概型及其概率计算公式.

【专题】 36: 整体思想; 40: 定义法; 5I: 概率与统计.

【分析】 利用列举法先求出不大于30的所有素数, 利用古典概型的概率公式进行计算即可.

【解答】 解: 在不大于30的素数中有, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29
共10个,

从中选2个不同的数有 $C_{10}^2=45$ 种,

和等于30的有 (7, 23), (11, 19), (13, 17), 共3种,

则对应的概率 $P=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$,

故选: C.

【点评】 本题主要考查古典概型的概率的计算, 求出不大于30的素数是解决本题的关键.

9. (5分) 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=1$, $AA_1=\sqrt{3}$, 则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 ()

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【考点】 LM: 异面直线及其所成的角.

【专题】 11: 计算题; 31: 数形结合; 41: 向量法; 5G: 空间角.

【分析】 以D为原点, DA为x轴, DC为y轴, DD_1 为z轴, 建立空间直角坐标系, 利用向量法能求出异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值.

【解答】 解: 以D为原点, DA为x轴, DC为y轴, DD_1 为z轴, 建立空间直角坐标系,

\therefore 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=1$,

$$AA_1=\sqrt{3},$$

$$\therefore A(1, 0, 0), D_1(0, 0, \sqrt{3}), D(0, 0, 0),$$

$$B_1(1, 1, \sqrt{3}),$$

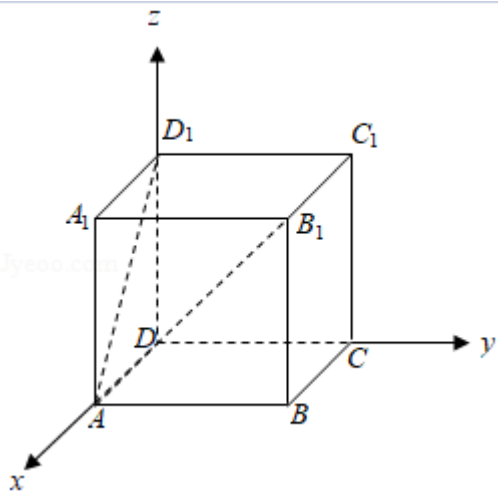
$$\overrightarrow{AD_1} = (-1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{DB_1} = (1, 1, \sqrt{3}),$$

设异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \cos\theta = \frac{|\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{DB_1}|}{|\overrightarrow{AD_1}| \cdot |\overrightarrow{DB_1}|} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

\therefore 异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选: C.



【点评】 本题考查异面直线所成角的余弦值的求法，考查空间中线线、线面、面面间的位置关系等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想，是基础题.

10. (5分) 若 $f(x) = \cos x - \sin x$ 在 $[-a, a]$ 是减函数，则 a 的最大值是 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{3\pi}{4}$ D. π

【考点】 GP: 两角和与差的三角函数; H5: 正弦函数的单调性.

【专题】 33: 函数思想; 4R: 转化法; 56: 三角函数的求值.

【分析】 利用两角和差的正弦公式化简 $f(x)$ ，由

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{得} \quad -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

取 $k=0$ ，得 $f(x)$ 的一个减区间为 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$ ，结合已知条件即可求出 a 的最大值.

【解答】 解: $f(x) = \cos x - \sin x = -(\sin x - \cos x) = -\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$,

$$\text{由} \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{得} \quad -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

取 $k=0$ ，得 $f(x)$ 的一个减区间为 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$ ，

由 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 是减函数，

$$\text{得} \begin{cases} -a \geq -\frac{\pi}{4} \\ a \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \therefore a \leq \frac{\pi}{4}.$$

则a的最大值是 $\frac{\pi}{4}$.

故选：A.

【点评】 本题考查了两角和与差的正弦函数公式的应用，三角函数的求值，属于基本知识的考查，是基础题.

11. (5分) 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x) = f(1+x)$ ，若 $f(1) = 2$ ，则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50) =$ ()
- A. -50 B. 0 C. 2 D. 50

【考点】 3K: 函数奇偶性的性质与判断.

【专题】 36: 整体思想; 40: 定义法; 51: 函数的性质及应用.

【分析】 根据函数奇偶性和对称性的关系求出函数的周期是4，结合函数的周期性和奇偶性进行转化求解即可.

【解答】 解: $\because f(x)$ 是奇函数，且 $f(1-x) = f(1+x)$ ，

$$\therefore f(1-x) = f(1+x) = -f(x-1), f(0) = 0,$$

$$\text{则} f(x+2) = -f(x), \text{则} f(x+4) = -f(x+2) = f(x),$$

即函数 $f(x)$ 是周期为4的周期函数，

$$\therefore f(1) = 2,$$

$$\therefore f(2) = f(0) = 0, f(3) = f(1-2) = f(-1) = -f(1) = -2,$$

$$f(4) = f(0) = 0,$$

$$\text{则} f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 2+0-2+0=0,$$

$$\text{则} f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50) = 12[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(49) + f(50)$$

$$= f(1) + f(2) = 2+0=2,$$

故选：C.

【点评】 本题主要考查函数值的计算，根据函数奇偶性和对称性的关系求出函

数的周期性是解决本题的关键.

12. (5分) 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, A 是 C 的左顶点, 点 P 在过 A 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, $\angle F_1F_2P = 120^\circ$, 则 C 的离心率为 ()
- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

【考点】 K4: 椭圆的性质.

【专题】 31: 数形结合; 44: 数形结合法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程

【分析】 求得直线 AP 的方程: 根据题意求得 P 点坐标, 代入直线方程, 即可求得椭圆的离心率.

【解答】 解: 由题意可知: $A(-a, 0)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$,

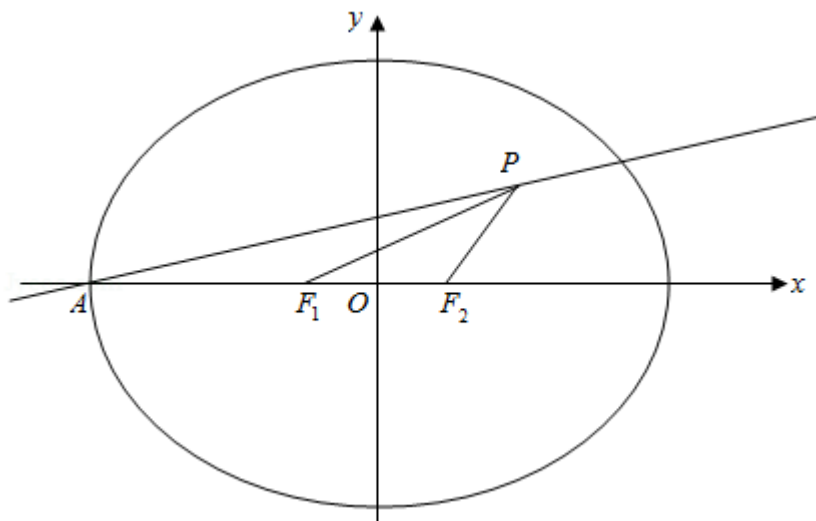
直线 AP 的方程为: $y = \frac{\sqrt{3}}{6}(x+a)$,

由 $\angle F_1F_2P = 120^\circ$, $|PF_2| = |F_1F_2| = 2c$, 则 $P(2c, \sqrt{3}c)$,

代入直线 AP : $\sqrt{3}c = \frac{\sqrt{3}}{6}(2c+a)$, 整理得: $a = 4c$,

\therefore 题意的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$.

故选: D.



【点评】 本题考查椭圆的性质，直线方程的应用，考查转化思想，属于中档题

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. (5分) 曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点(0, 0)处的切线方程为 $y=2x$ 。

【考点】 6H: 利用导数研究曲线上某点切线方程.

【专题】 11: 计算题; 34: 方程思想; 49: 综合法; 53: 导数的综合应用.

【分析】 欲求出切线方程，只须求出其斜率即可，故先利用导数求出在 $x=0$ 处的导函数值，再结合导数的几何意义即可求出切线的斜率，从而问题解决.

【解答】 解: $\because y=2\ln(x+1)$,

$$\therefore y' = \frac{2}{x+1},$$

当 $x=0$ 时, $y'=2$,

\therefore 曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点(0, 0)处的切线方程为 $y=2x$.

故答案为: $y=2x$.

【点评】 本小题主要考查直线的斜率、导数的几何意义、利用导数研究曲线上某点切线方程等基础知识，考查运算求解能力，属于基础题.

14. (5分) 若 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x+2y-5 \geq 0 \\ x-2y+3 \geq 0 \\ x-5 \leq 0 \end{cases}$$
，则 $z=x+y$ 的最大值为 9。

【考点】 7C: 简单线性规划.

【专题】 11: 计算题; 31: 数形结合; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5T: 不等式.

【分析】 由约束条件作出可行域，数形结合得到最优解，求出最优解的坐标，代入目标函数得答案.

【解答】 解: 由 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x+2y-5 \geq 0 \\ x-2y+3 \geq 0 \\ x-5 \leq 0 \end{cases}$$
 作出可行域如图，

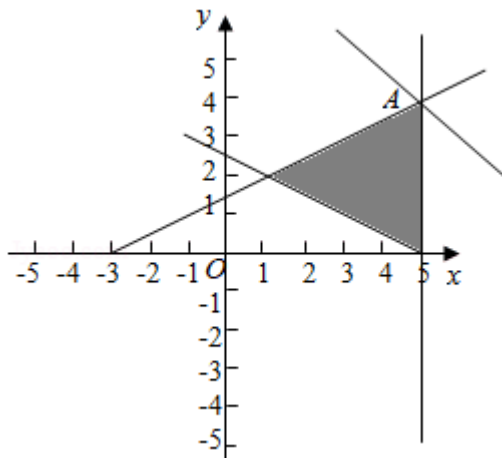
化目标函数 $z=x+y$ 为 $y=-x+z$,

由图可知，当直线 $y = -x + z$ 过A时， z 取得最大值，

$$\text{由} \begin{cases} x=5 \\ x-2y+3=0 \end{cases}, \text{解得} A(5, 4),$$

目标函数有最大值，为 $z=9$ 。

故答案为：9.



【点评】 本题考查了简单的线性规划，考查了数形结合的解题思想方法，是中档题.

15. (5分) 已知 $\sin\alpha + \cos\beta = 1$, $\cos\alpha + \sin\beta = 0$, 则 $\sin(\alpha + \beta) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$.

【考点】 GP: 两角和与差的三角函数.

【专题】 33: 函数思想; 48: 分析法; 56: 三角函数的求值.

【分析】 把已知等式两边平方化简可得 $2 + 2(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = 1$, 再利用两角和的正弦公式化简为 $2\sin(\alpha + \beta) = -1$, 可得结果.

【解答】 解: $\sin\alpha + \cos\beta = 1$,

两边平方可得: $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = 1$, ①,

$\cos\alpha + \sin\beta = 0$,

两边平方可得: $\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = 0$, ②,

由①+②得: $2 + 2(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = 1$, 即 $2 + 2\sin(\alpha + \beta) = 1$,

$\therefore 2\sin(\alpha + \beta) = -1$.

$\therefore \sin(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点评】 本题考查了两角和与差的正弦函数公式的应用, 三角函数的求值, 属于基本知识的考查, 是基础题.

16. (5分) 已知圆锥的顶点为S, 母线SA, SB所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$, SA与圆锥底面所成角为 45° , 若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$, 则该圆锥的侧面积为 $40\sqrt{2}\pi$.

【考点】 M1: 直线与平面所成的角.

【专题】 11: 计算题; 35: 转化思想; 49: 综合法; 5F: 空间位置关系与距离.

【分析】 利用已知条件求出圆锥的母线长, 利用直线与平面所成角求解底面半径, 然后求解圆锥的侧面积.

【解答】 解: 圆锥的顶点为S, 母线SA, SB所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$, 可得 $\sin\angle ASB =$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

$\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$,

可得 $\frac{1}{2}SA^2\sin\angle ASB = 5\sqrt{15}$, 即 $\frac{1}{2}SA^2 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = 5\sqrt{15}$, 即 $SA = 4\sqrt{5}$.

SA与圆锥底面所成角为 45° , 可得圆锥的底面半径为: $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 4\sqrt{5} = 2\sqrt{10}$.

则该圆锥的侧面积: $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} \times 4\sqrt{5}\pi = 40\sqrt{2}\pi$.

故答案为: $40\sqrt{2}\pi$.

【点评】 本题考查圆锥的结构特征, 母线与底面所成角, 圆锥的截面面积的求法, 考查空间想象能力以及计算能力.

三、解答题: 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题, 考生根要求作答。(一)必考题: 共60分。

17. (12分) 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前n项和, 已知 $a_1 = -7$, $S_3 = -15$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；
 (2) 求 S_n ，并求 S_n 的最小值.

【考点】 84: 等差数列的通项公式; 85: 等差数列的前 n 项和.

【专题】 34: 方程思想; 49: 综合法; 54: 等差数列与等比数列.

【分析】 (1) 根据 $a_1 = -7$, $S_3 = -15$, 可得 $a_1 = -7$, $3a_1 + 3d = -15$, 求出等差数列 $\{a_n\}$ 的公差, 然后求出 a_n 即可;

(2) 由 $a_1 = -7$, $d=2$, $a_n = 2n - 9$, 得 $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{1}{2} (2n^2 - 16n) = n^2 - 8n = (n - 4)^2 - 16$, 由此可求出 S_n 以及 S_n 的最小值.

【解答】 解: (1) \because 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -7$, $S_3 = -15$,

$$\therefore a_1 = -7, 3a_1 + 3d = -15, \text{ 解得 } a_1 = -7, d=2,$$

$$\therefore a_n = -7 + 2(n - 1) = 2n - 9;$$

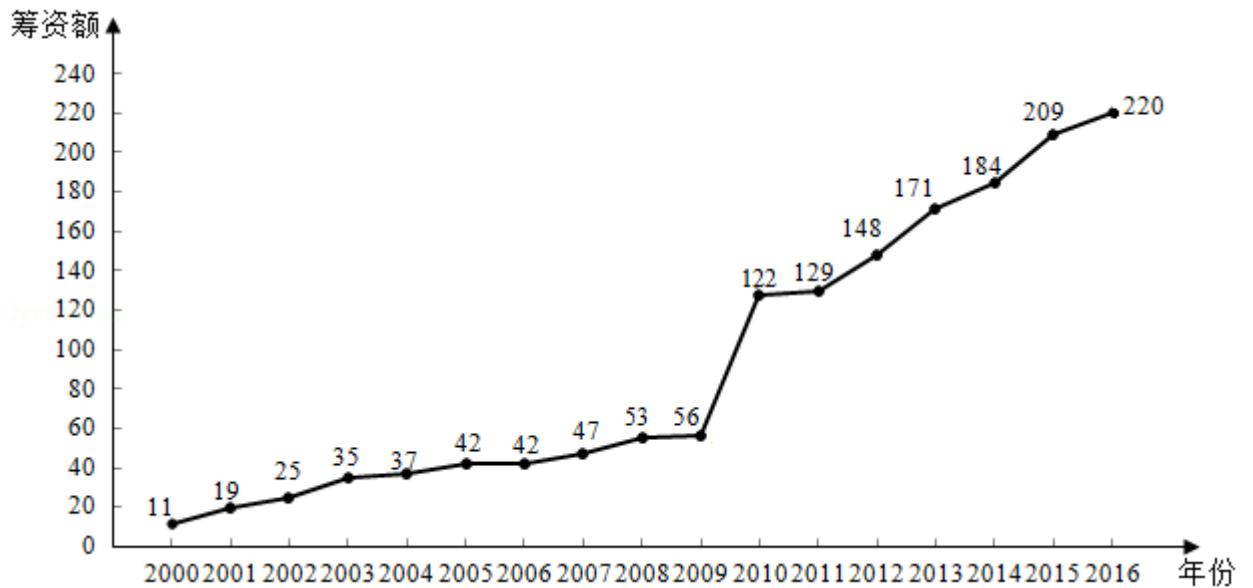
(2) $\because a_1 = -7$, $d=2$, $a_n = 2n - 9$,

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{1}{2} (2n^2 - 16n) = n^2 - 8n = (n - 4)^2 - 16,$$

\therefore 当 $n=4$ 时, 前 n 项的和 S_n 取得最小值为 -16 .

【点评】 本题主要考查了等差数列的通项公式, 考查了等差数列的前 n 项的和公式, 属于中档题.

18. (12分) 如图是某地区2000年至2016年环境基础设施投资额 y (单位: 亿元) 的折线图.



为了预测该地区2018年的环境基础设施投资额，建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据2000年至2016年的数据（时间变量 t 的值依次为1, 2, ..., 17）建立模型①： $\hat{y} = -30.4 + 13.5t$ ；根据2010年至2016年的数据（时间变量 t 的值依次为1, 2, ..., 7）建立模型②： $\hat{y} = 99 + 17.5t$.

- (1) 分别利用这两个模型，求该地区2018年的环境基础设施投资额的预测值；
- (2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠？并说明理由.

【考点】 BK: 线性回归方程.

【专题】 31: 数形结合; 40: 定义法; 51: 概率与统计.

【分析】 (1) 根据模型①计算 $t=19$ 时 \hat{y} 的值，根据模型②计算 $t=9$ 时 \hat{y} 的值即可；

(2) 从总体数据和2000年到2009年间递增幅度以及2010年到2016年间递增的幅度比较，即可得出模型②的预测值更可靠些.

【解答】 解：(1) 根据模型①： $\hat{y} = -30.4 + 13.5t$,

计算 $t=19$ 时， $\hat{y} = -30.4 + 13.5 \times 19 = 226.1$ ；

利用这个模型，求出该地区2018年的环境基础设施投资额的预测值是226.1亿元

;

根据模型②: $\hat{y}=99+17.5t$,

计算 $t=9$ 时, $\hat{y}=99+17.5\times 9=256.5$;

利用这个模型, 求该地区2018年的环境基础设施投资额的预测值是256.5亿元;

(2) 模型②得到的预测值更可靠;

因为从总体数据看, 该地区从2000年到2016年的环境基础设施投资额是逐年上升的,

而从2000年到2009年间递增的幅度较小些,

从2010年到2016年间递增的幅度较大些,

所以, 利用模型②的预测值更可靠些.

【点评】 本题考查了线性回归方程的应用问题, 是基础题.

19. (12分) 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F , 过 F 且斜率为 k ($k>0$) 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|=8$.

(1) 求 l 的方程;

(2) 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

【考点】 KN: 直线与抛物线的综合.

【专题】 35: 转化思想; 4R: 转化法; 5D: 圆锥曲线的定义、性质与方程.

【分析】 (1) 方法一: 设直线 AB 的方程, 代入抛物线方程, 根据抛物线的焦点弦公式即可求得 k 的值, 即可求得直线 l 的方程;

方法二: 根据抛物线的焦点弦公式 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta}$, 求得直线 AB 的倾斜角, 即可

求得直线 l 的斜率, 求得直线 l 的方程;

(2) 根据过 A, B 分别向准线 l 作垂线, 根据抛物线的定义即可求得半径, 根据中点坐标公式, 即可求得圆心, 求得圆的方程.

【解答】 解: (1) 方法一: 抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 设直线 AB 的方程为: $y=k(x-1)$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

则 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$, 整理得: $k^2x^2 - 2(k^2+2)x + k^2 = 0$, 则 $x_1+x_2 = \frac{2(k^2+2)}{k^2}$, $x_1x_2=1$,

由 $|AB| = x_1+x_2+p = \frac{2(k^2+2)}{k^2} + 2 = 8$, 解得: $k^2=1$, 则 $k=1$,

∴ 直线 l 的方程 $y=x-1$;

方法二: 抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 设直线 AB 的倾斜角为 θ , 由抛物

线的弦长公式 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta} = \frac{4}{\sin^2 \theta} = 8$, 解得: $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}$,

∴ $\theta = \frac{\pi}{4}$, 则直线的斜率 $k=1$,

∴ 直线 l 的方程 $y=x-1$;

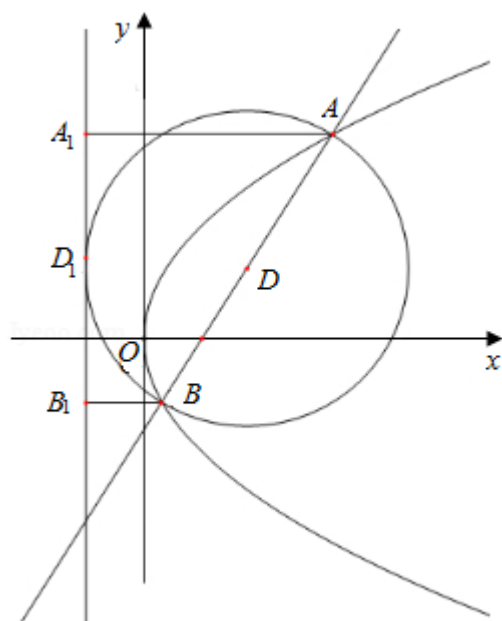
(2) 由 (1) 可得 AB 的中点坐标为 $D(3, 2)$, 则直线 AB 的垂直平分线方程为 y

$-2 = -(x-3)$, 即 $y = -x+5$,

设所求圆的圆心坐标为 (x_0, y_0) , 则 $\begin{cases} y_0 = -x_0 + 5 \\ (x_0+1)^2 = \frac{(y_0-x_0+1)^2}{2} + 16 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} x_0=3 \\ y_0=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=11 \\ y_0=-6 \end{cases}$,

因此, 所求圆的方程为 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ 或 $(x-11)^2 + (y+6)^2 = 144$.



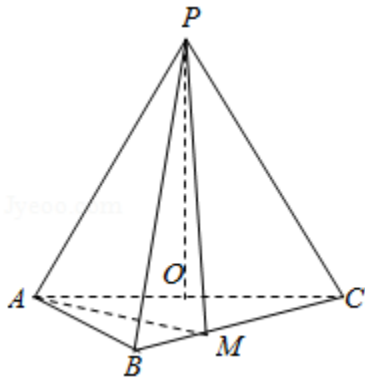
【点评】 本题考查抛物线的性质, 直线与抛物线的位置关系, 抛物线的焦点弦

公式，考查圆的标准方程，考查转换思想思想，属于中档题.

20. (12分) 如图，在三棱锥P - ABC中， $AB=BC=2\sqrt{2}$ ， $PA=PB=PC=AC=4$ ，O为AC的中点.

(1) 证明： $PO\perp$ 平面ABC；

(2) 若点M在棱BC上，且二面角M - PA - C为 30° ，求PC与平面PAM所成角的正弦值.



【考点】 LW: 直线与平面垂直； MI: 直线与平面所成的角； MJ: 二面角的平面角及求法.

【专题】 35: 转化思想； 41: 向量法； 4R: 转化法； 5F: 空间位置关系与距离； 5H: 空间向量及应用.

【分析】 (1) 利用线面垂直的判定定理证明 $PO\perp AC$ ， $PO\perp OB$ 即可；

(2) 根据二面角的大小求出平面PAM的法向量，利用向量法即可得到结论.

【解答】 (1) 证明：连接BO，

$\because AB=BC=2\sqrt{2}$ ，O是AC的中点，

$\therefore BO\perp AC$ ，且 $BO=2$ ，

又 $PA=PC=PB=AC=4$ ，

$\therefore PO\perp AC$ ， $PO=2\sqrt{3}$ ，

则 $PB^2=PO^2+BO^2$ ，

则 $PO\perp OB$ ，

$\because OB\cap AC=O$ ，

$\therefore PO\perp$ 平面ABC；

(2) 建立以O坐标原点，OB，OC，OP分别为x，y，z轴的空间直角坐标系如图

:

$$A(0, -2, 0), P(0, 0, 2\sqrt{3}), C(0, 2, 0), B(2, 0, 0),$$

$$\vec{BC} = (-2, 2, 0),$$

$$\text{设 } \vec{BM} = \lambda \vec{BC} = (-2\lambda, 2\lambda, 0), 0 < \lambda < 1$$

$$\text{则 } \vec{AM} = \vec{BM} - \vec{BA} = (-2\lambda, 2\lambda, 0) - (-2, -2, 0) = (2-2\lambda, 2\lambda+2, 0),$$

$$\text{则平面PAC的法向量为 } \vec{\pi} = (1, 0, 0),$$

$$\text{设平面MPA的法向量为 } \vec{n} = (x, y, z),$$

$$\text{则 } \vec{PA} = (0, -2, -2\sqrt{3}),$$

$$\text{则 } \vec{n} \cdot \vec{PA} = -2y - 2\sqrt{3}z = 0, \vec{n} \cdot \vec{AM} = (2-2\lambda)x + (2\lambda+2)y = 0$$

$$\text{令 } z=1, \text{ 则 } y = -\sqrt{3}, x = \frac{(\lambda+1)\sqrt{3}}{1-\lambda},$$

$$\text{即 } \vec{n} = \left(\frac{(\lambda+1)\sqrt{3}}{1-\lambda}, -\sqrt{3}, 1 \right),$$

∵二面角M-PA-C为30°，

$$\therefore \cos 30^\circ = \left| \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

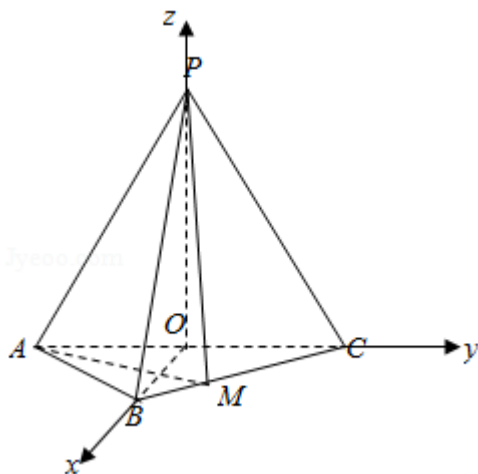
$$\text{即 } \frac{\frac{(\lambda+1)\sqrt{3}}{1-\lambda} \cdot (-\sqrt{3})}{\sqrt{\left(\frac{\lambda+1}{1-\lambda}\sqrt{3}\right)^2 + 1 + 3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{3} \text{ 或 } \lambda = 3 \text{ (舍)},$$

$$\text{则平面MPA的法向量 } \vec{n} = (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1),$$

$$\vec{PC} = (0, 2, -2\sqrt{3}),$$

$$\text{PC与平面PAM所成角的正弦值 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{PC}, \vec{n} \rangle| = \left| \frac{-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{16}} \right| = \frac{4\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$



【点评】 本题主要考查空间直线和平面位置关系的应用以及二面角，线面角的求解，建立坐标系求出点的坐标，利用向量法是解决本题的关键。

21. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

- (1) 若 $a=1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a .

【考点】 6D: 利用导数研究函数的极值.

【专题】 35: 转化思想; 49: 综合法; 53: 导数的综合应用.

【分析】 (1) 通过两次求导, 利用导数研究函数的单调性极值与最值即可证明,

(2) 方法一、分离参数可得 $a = \frac{e^x}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个根, 即函数 $y=a$ 与 $G(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 只有一个交点. 结合图象即可求得 a .

方法二、: ①当 $a \leq 0$ 时, $f(x) = e^x - ax^2 > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 没有零点. .

②当 $a > 0$ 时, 设函数 $h(x) = 1 - ax^2e^{-x}$. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点 $\Leftrightarrow h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点.

利用

$h'(x) = x(x-2)e^{-x}$, 可得 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 递减, 在 $(2, +\infty)$ 递增, 结合函数 $h(x)$ 图象即可求得 a .

【解答】证明：（1）当 $a=1$ 时，函数 $f(x) = e^x - x^2$.

则 $f'(x) = e^x - 2x$,

令 $g(x) = e^x - 2x$, 则 $g'(x) = e^x - 2$,

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \ln 2$.

当 $x \in (0, \ln 2)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$,

$\therefore g(x) \geq g(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \cdot \ln 2 = 2 - 2\ln 2 > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, $\therefore f(x) \geq f(0) = 1$,

解：（2）方法一、, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点 \Leftrightarrow 方程 $e^x - ax^2 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个根,

$\Leftrightarrow a = \frac{e^x}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个根,

即函数 $y=a$ 与 $G(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 只有一个交点.

$$G'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3},$$

当 $x \in (0, 2)$ 时, $G'(x) < 0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $G'(x) > 0$,

$\therefore G(x)$ 在 $(0, 2)$ 递减, 在 $(2, +\infty)$ 递增,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $G(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $G(x) \rightarrow +\infty$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点时, $a = G(2) = \frac{e^2}{4}$.

方法二：①当 $a \leq 0$ 时, $f(x) = e^x - ax^2 > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 没有零点. .

②当 $a > 0$ 时, 设函数 $h(x) = 1 - ax^2e^{-x}$. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点 $\Leftrightarrow h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点.

$h'(x) = x(x-2)e^{-x}$, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 2)$ 递减, 在 $(2, +\infty)$ 递增, $\therefore h(x)_{\min} = h(2) = 1 - \frac{4a}{e^2}$, ($x \geq 0$) .

当 $h(2) < 0$ 时, 即 $a > \frac{e^2}{4}$, 由于 $h(0) = 1$, 当 $x > 0$ 时, $e^x > x^2$, 可得 $h(4a)$

$$= 1 - \frac{16a^3}{e^{4a}} = 1 - \frac{16a^3}{(e^{2a})^2} > 1 - \frac{16a^3}{(2a)^4} = 1 - \frac{1}{a} > 0. \quad h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 有 2 个}$$

零点

当 $h(2) > 0$ 时, 即 $a < \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 没有零点,

当 $h(2) = 0$ 时, 即 $a = \frac{e^2}{4}$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点,

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点时, $a = \frac{e^2}{4}$.

【点评】 本题考查了利用导数探究函数单调性, 以及函数零点问题, 考查了转化思想、数形结合思想, 属于中档题.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. [选修4-4: 坐标系与参数方程]

22. (10分) 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=4\sin\theta \end{cases}$, (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t\cos\alpha \\ y=2+t\sin\alpha \end{cases}$, (t 为参数).

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程;

(2) 若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1, 2)$, 求 l 的斜率.

【考点】 QH: 参数方程化成普通方程.

【专题】 35: 转化思想; 5S: 坐标系和参数方程.

【分析】 (1) 直接利用转换关系, 把参数方程和极坐标方程与直角坐标方程进行转化.

(2) 利用直线和曲线的位置关系, 在利用中点坐标求出结果.

【解答】 解: (1) 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=4\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数),

转换为直角坐标方程为: $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$.

直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t\cos\alpha \\ y=2+t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数).

转换为直角坐标方程为: $x\sin\alpha - y\cos\alpha + 2\cos\alpha - \sin\alpha = 0$.

(2) 把直线的参数方程代入椭圆的方程得到: $\frac{(2+t\sin\alpha)^2}{16} + \frac{(1+t\cos\alpha)^2}{4} = 1$

整理得: $(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)t^2 + (8\cos\alpha + 4\sin\alpha)t - 8 = 0$,

则: $t_1 + t_2 = -\frac{8\cos\alpha + 4\sin\alpha}{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$,

由于 (1, 2) 为中点坐标,

① 当直线的斜率不存在时, $x=1$.

无解故舍去.

② 当直线的斜率存在时, (由于 t_1 和 t_2 为 A、B 对应的参数)

所以利用中点坐标公式 $\frac{t_1 + t_2}{2} = 0$,

则: $8\cos\alpha + 4\sin\alpha = 0$,

解得: $\tan\alpha = -2$,

即: 直线 l 的斜率为 -2 .

【点评】 本题考查的知识要点: 参数方程和极坐标方程与直角坐标方程的转化, 直线和曲线的位置关系的应用, 中点坐标的应用.

[选修4-5: 不等式选讲]

23. 设函数 $f(x) = 5 - |x+a| - |x-2|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \leq 1$, 求 a 的取值范围.

【考点】 R5: 绝对值不等式的解法.

【专题】 11: 计算题; 38: 对应思想; 4R: 转化法; 5T: 不等式.

【分析】 (1) 去绝对值, 化为分段函数, 求出不等式的解集即可,

(2) 由题意可得 $|x+a| + |x-2| \geq 4$, 根据绝对值的几何意义即可求出

【解答】 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = 5 - |x+1| - |x-2| = \begin{cases} 2x+4, & x \leq -1 \\ 2, & -1 < x < 2 \\ -2x+6, & x \geq 2 \end{cases}$

当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = 2x+4 \geq 0$, 解得 $-2 \leq x \leq -1$,

当 $-1 < x < 2$ 时, $f(x) = 2 \geq 0$ 恒成立, 即 $-1 < x < 2$,

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = -2x+6 \geq 0$, 解得 $2 \leq x \leq 3$,

综上所述不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-2, 3]$,

$$(2) \because f(x) \leq 1,$$

$$\therefore 5 - |x+a| - |x-2| \leq 1,$$

$$\therefore |x+a| + |x-2| \geq 4,$$

$$\therefore |x+a| + |x-2| = |x+a| + |2-x| \geq |x+a+2-x| = |a+2|,$$

$$\therefore |a+2| \geq 4,$$

解得 $a \leq -6$ 或 $a \geq 2$,

故 a 的取值范围 $(-\infty, -6] \cup [2, +\infty)$.

【点评】 本题考查了绝对值的不等式和绝对值的几何意义, 属于中档题