

2015年普通高等学校招生全国统一考试(湖南卷)

数学(文科)

一、选择题:本大题共10小题,每小题5分,共50分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1、已知 $\frac{(1-i)^2}{z} = 1+i$ (i 为虚数单位), 则复数 $z =$ ()

- A、 $1+i$ B、 $1-i$ C、 $-1+i$ D、 $-1-i$

2、在一次马拉松比赛中,35名运动员的成绩(单位:分钟)如图I所示;

13	0	0	3	4	5	6	6	8	8	8	9						
14	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	7	8
15	0	1	2	2	3	3	3										

若将运动员按成绩由好到差编为1~35号,再用系统抽样方法从中抽取7人,则其中成绩在区间[139,151]上的运动员人数为()

- A、3 B、4 C、5 D、6

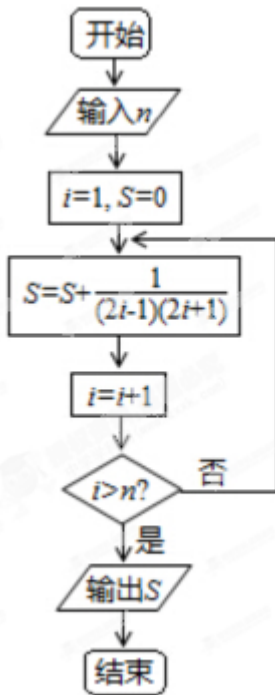
3、设 $x \in \mathbb{R}$, 则“ $x > 1$ ”是“ $x^2 > 1$ ”的()

- A、充分不必要条件 B、必要不充分条件
C、充要条件 D、既不充分也不必要条件

4、若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 1 \\ y-x \leq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$, 则 $z=2x-y$ 的最小值为()

- A、-1 B、0 C、1 D、2

5、执行如图2所示的程序框图,如果输入 $n=3$, 中输入的 $S =$ ()



- A、 $\frac{6}{7}$ B、 $\frac{3}{7}$ C、 $\frac{8}{9}$ D、 $\frac{4}{9}$

6、若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线经过点 (3, -4)，则此双曲线的离心率为

- A、 $\frac{\sqrt{7}}{3}$ B、 $\frac{5}{4}$ C、 $\frac{4}{3}$ D、 $\frac{5}{3}$

7、若实数 a, b 满足 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \sqrt{ab}$ ，则 ab 的最小值为()

- A、 $\sqrt{2}$ B、2 C、 $2\sqrt{2}$ D、4

8、设函数 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ ，则 $f(x)$ 是()

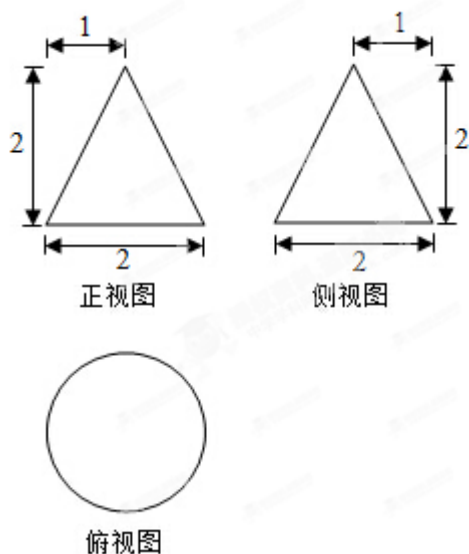
- A、奇函数，且在 (0,1) 上是增函数 B、奇函数，且在 (0,1) 上是减函数
 C、偶函数，且在 (0,1) 上是增函数 D、偶函数，且在 (0,1) 上是减函数

9、已知点 A, B, C 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上运动，且 $AB \perp BC$ ，若点 P 的坐标为 (2, 0)，则 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}|$ 的最大值为

- A、6 B、7 C、8 D、9

10、某工作的三视图如图 3 所示，现将该工作通过切削，加工成一个体积尽可能大的正方体新工件，并使新工件的一个面落在原工作的一个面内，则原工件材料的利用率为(材料利用率=新工件的体积/原工件的体积)

- A、 $\frac{8\pi}{9}$ B、 $\frac{8}{27\pi}$ C、 $\frac{24(\sqrt{2}-1)^2}{\pi}$ D、 $\frac{8(\sqrt{2}-1)^2}{\pi}$



二、填空题 题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11、已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, 则 $A \cup (\complement_U B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

12、在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 若曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta$ ，则曲线 C 的直角坐标方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 若直线 $3x - 4y + 5 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相交于 A, B 两点，且 $\angle AOB = 120^\circ$ (O 为坐标原点)，则 $r = \underline{\hspace{2cm}}$.

14、若函数 $f(x) = |2^x - 2| - b$ 有两个零点，则实数 b 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15、已知 $\omega > 0$, 在函数 $y = 2\sin\omega x$ 与 $y = 2\cos\omega x$ 的图像的交点中，距离最短的两个交点的距离为 $2\sqrt{3}$ ，则 $\omega = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

16. 本小题满分 12 分) 某商场举行有奖促销活动，顾客购买一定金额的商品后即可抽奖，抽奖方法是：从装有 2 个红球 A_1, A_2 和 1 个白球 B 的甲箱与装有 2 个红球 a_1, a_2 和 2 个白球 b_1, b_2 的乙箱中，各随机摸出 1 个球，若摸出的 2 个球都是红球则中奖，否则不中奖。

(I) 用球的标号列出所有可能的摸出结果；

(II) 有人认为：两个箱子中的红球比白球多，所以中奖的概率大于不中奖的概率，你认为正确吗？请说明理由。

17. 本小题满分 12 分) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = b \tan A$.

(I) 证明： $\sin B = \cos A$ ；

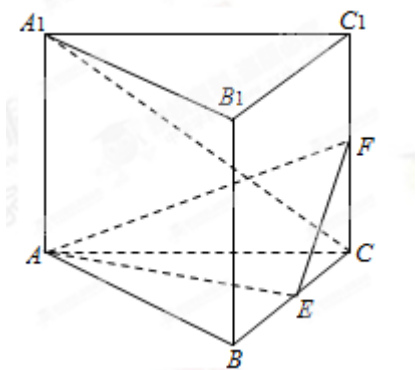
(II) 若 $\sin C - \sin A \cos B = \frac{3}{4}$ ，且 B 为锐角，求 A, B, C 。

18. 本小题满分 12 分) 如图 4, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 2 的正三角形, E, F 分别是 BC, CC_1

的中点。

(I) 证明：平面 $AEF \perp$ 平面 B_1BCC_1 ；

(II) 若直线 A_1C 与平面 A_1ABB_1 所成的角为 45° ，求三棱锥 $F-AEC$ 的体积。



19. 本小题满分 13 分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，已知 $a_1 = 1, a_2 = 2$ ，且 $a_{n+1} = 3S_n$

$$-S_{n+1} + 3, (n \in N^*),$$

(I) 证明： $a_{n+2} = 3a_n$ ；

(II) 求 S_n 。

20. 本小题满分 13 分) 已知抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 的焦点 F 也是椭圆 $C_2: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

($a > b > 0$) 的一个焦点， C_1 与 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{6}$ ，过点 F 的直线 l 与 C_1 相交于 A, B 两点，与 C_2 相交于 C, D 两点，且 \overrightarrow{AC} 与 \overrightarrow{BD} 同向。

(I) 求 C_2 的方程；

(II) 若 $|AC| = |BD|$ ，求直线 l 的斜率。

21. 本小题满分 13 分) 函数 $f(x) = ae^x \cos x (x \in [0, +\infty))$ ，记 x_n 为 $f(x)$ 的从小到大的第 $n (n \in N^*)$ 个极值点。

(I) 证明：数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列；

(II) 若对一切 $n \in N^*$, $x_n \leq |f(x_n)|$ 恒成立，求 a 的取值范围。