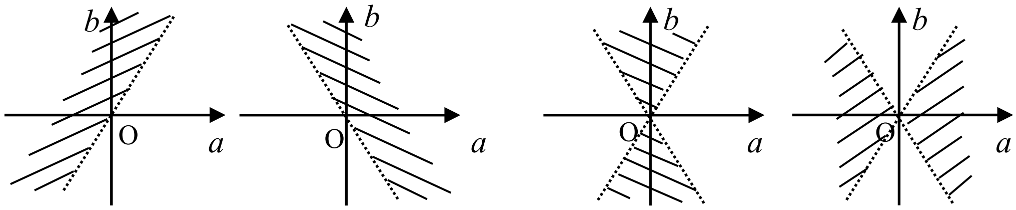
2003年江苏高考数学真题及答案

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．如果函数 $y=ax^2+bx+a$ 的图象与 x 轴有两上交点，则点（a，b）在 aOb 平面上的区域（不包含边界）为



(A)　　　　　(B)　　　　　(C)　　　　　(D)　（　　）

2．抛物线 $y=ax^2$ 的准线方程是 y=2，则 a 的值为

A．$\frac{1}{8}$　　　B．$-\frac{1}{8}$　　　C．8　　　D．-8

3．已知 $x\in(-\frac{\pi}{2},0),\cos x=\frac{4}{5}$，则 $\tan 2x=$　（　　）

A．$\frac{7}{24}$　　　B．$-\frac{7}{24}$　　　C．$\frac{24}{7}$　　　D．$-\frac{24}{7}$

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1, & x\le 0,\\ x^{\frac{1}{2}}, & x>0.\end{cases}$ 若 $f(x_0)>1$，则 x_0 的取值范围是　（　　）

A．（－1，1）　　　B．（－1，+∞）

C．（－∞，－2）∪（0，+∞）　　　D．（－∞，－1）∪（1，+∞）

5．O是平面上一定点，A、B、C是平面上不共线的三个点，动点P满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}),\lambda\in[0,+\infty)$，

则P的轨迹一定通过△ABC的　（　　）

A．外心　　　B．内心　　　C．重心　　　D．垂心

6．函数 $y=\ln\frac{x+1}{x-1},x\in(1,+\infty)$ 的反函数为　（　　）

A．$y=\frac{e^x-1}{e^x+1},x\in(0,+\infty)$　　　B．$y=\frac{e^x+1}{e^x-1},x\in(0,+\infty)$

C．$y=\frac{e^x-1}{e^x+1},x\in(-\infty,0)$　　　D．$y=\frac{e^x+1}{e^x-1},x\in(-\infty,0)$

7．棱长为 a 的正方体中，连结相邻面的中心，以这些线段为棱的八面体的体积为　（　　）

A．$\frac{a^3}{3}$　　　B．$\frac{a^3}{4}$　　　C．$\frac{a^3}{6}$　　　D．$\frac{a^3}{12}$

8．设 $a>0,f(x)=ax^2+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的倾斜角的取值范围为 $[0,\frac{\pi}{4}]$，则P到曲线 $y=f(x)$ 对称轴距离的取值范围为　（　　）

A．$[0,\frac{1}{a}]$　　　B．$[0,\frac{1}{2a}]$　　　C．$[0,|\frac{b}{2a}|]$　　　D．$[0,|\frac{b-1}{2a}|]$

9．已知方程$(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$的四个根组成一个首项为$\frac{1}{4}$的等差数列，则 |m—n|=

（　　）

A．1　　　B．$\frac{3}{4}$　　　C．$\frac{1}{2}$　　　D．$\frac{3}{8}$

10.已知双曲线中心在原点且一个焦点为F（$\sqrt{7}$,0）直线 y=x—1 与其相交于 M、N 两点,MN 中点的横坐标为$-\frac{2}{3}$，则此双曲线的方程是　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A．$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$　　B．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$　　C．$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$　　D．$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$

11．已知长方形四个顶点 A（0，0），B（2，0），C（2，1）和 D（0，1）．一质点从 AB 的中点 P_0沿与 AB 夹角为 θ 的方向射到 BC 上的点 P_1后，依次反射到 CD、DA 和 AB 上的点 P_2、P_3和 P_4（入射角等于反射角）．设 P_4的坐标为（x_4，0）．若 1< x_4<2，则 tan θ 的取值范围是　　　　　　　（　　）

A．$(\frac{1}{3},1)$　　　B．$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$　　　C．$(\frac{2}{5},\frac{1}{2})$　　　D．$(\frac{2}{5},\frac{2}{3})$

12．一个四面体的所有棱长都为$\sqrt{2}$，四个顶点在同一球面上，则此球的表面积为（　　）

A．3π　　　B．4π　　　C．$3\sqrt{3}$π　　　D．6π

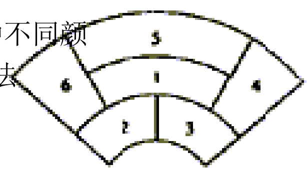
第Ⅱ卷（非选择题　共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，把答案填在题中横线上.

13．$(x^2-\frac{1}{2x})^9$展开式中 x^9的系数是______________

14．某公司生产三种型号的轿车，产量分别为 1200 辆，6000 辆和 2000 辆，为检验该公司的产品质量，现用分层抽样的方法抽取 46 辆进行检验，这三种型号的轿车依次应抽取______________，__________，______辆

15．某城市在中心广场建造一个花圃，花圃分为 6 个部分（如图）.现要栽种 4 种不同颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花，不同的栽种方法有_______种.（以数字作答）



16．对于四面体 ABCD，给出下列四个命题

①若 AB=AC，BD=CD，则 BC⊥AD.　　　②若 AB=CD，AC=BD，则 BC⊥AD.

③若 AB⊥AC，BD⊥CD，则 BC⊥AD.　　　④若 AB⊥CD，BD⊥AC，则 BC⊥AD.

其中真命题的序号是___________．（写出所有真命题的序号）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17．（本小题满分 12 分）

有三种产品，合格率分别是 0.90，0.95 和 0.95，各抽取一件进行检验.

（Ⅰ）求恰有一件不合格的概率；（Ⅱ）求至少有两件不合格的概率.（精确到 0.001）

18．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0\le\varphi\le\pi)$上 R 上的偶函数，其图象关于点 $M(\frac{3\pi}{4},0)$对称，且在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$

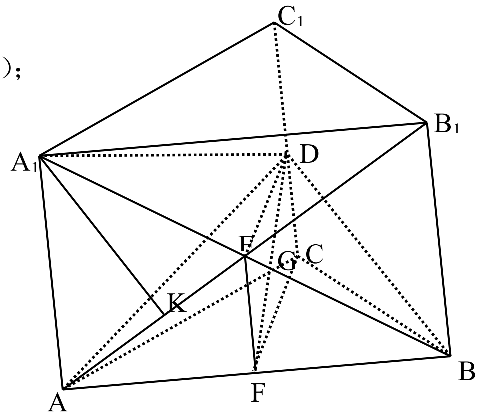
上是单调函数，求φ和ω的值.

19.（本小题满分 12 分）

如图，直三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$中，底面是等腰直角三角形，∠ACB=90°，侧棱 $AA_1=2$，D、E 分别是 CC_1与 A_1B 的中点，点 E 在平面 ABD 上的射影是△ABD 的垂心 G.

（Ⅰ）求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）；

（Ⅱ）求点 A_1到平面 AED 的距离.



20.（本小题满分 12 分）

已知常数$a>0$，向量$c=(0,a),i=(1,0)$.经过原点 O 以$c+\lambda i$为方向向量的直线与经过定点 A（0，a）以$i-2\lambda c$为方向向量的直线相交于点 P，其中$\lambda\in R$.试问：是否存在两个定点 E、F，使得|PE|+|PF|为定值.若存在，求出 E、F 的坐标；若不存在，说明理由.

21.（本小题满分 12 分）已知$a>0,n$为正整数.

（Ⅰ）设$y=(x-a)^n$,证明$y'=n(x-a)^{n-1}$；

（Ⅱ）设$f_n(x)=x^n-(x-a)^n$,对任意$n\geq a$,证明$f_{n+1}{}'(n+1)>(n+1)f_n{}'(n)$.

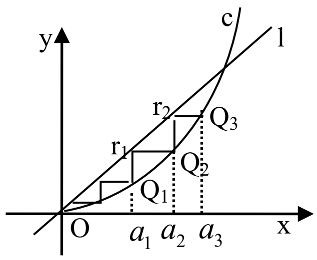
22.（本小题满分 14 分）

设$a>0$,如图，已知直线$l:y=ax$及曲线 C：$y=x^2$，C 上的点 Q_1的横坐标为a_1（$0<a_1<a$）.从 C 上的点 Q_n（n≥1）作直线平行于 x 轴，交直线 l 于点P_{n+1}，再从点P_{n+1}作直线平行于 y 轴，交曲线 C 于点 Q_{n+1}. Q_n（n=1，2，3，…）的横坐标构成数列$\{a_n\}$.

（Ⅰ）试求a_{n+1}与a_n的关系，并求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）当$a=1,a_1\leq\dfrac{1}{2}$时，证明$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}<\dfrac{1}{32}$；

（Ⅲ）当a=1 时，证明$\sum_{k-1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}<\dfrac{1}{3}$.



一、选择题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 5 分，满分 60 分.

1. C　2. B　3. D　4. D　5. B　6. B　7. C　8. B　9. C　10. D　11. C　12. A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 4 分，满分 16 分.

13．$-\frac{21}{2}$　　14．6, 30, 10　　15．120　　16．①④

三、解答题

17．本小题要主考查相互独立事件概率的计算，运用数学知识解决问题的能力，满分 12 分.

解：设三种产品各抽取一件，抽到合格产品的事件分别为 A、B 和 C.

（Ⅰ）$P(A)=0.90, P(B)=P(C)=0.95$，　　$P(\overline{A})=0.10, P(\overline{B})=P(\overline{C})=0.50.$

因为事件 A，B，C 相互独立，恰有一件不合格的概率为

$$P(A\cdot B\cdot \overline{C})+P(A\cdot \overline{B}\cdot C)+P(\overline{A}\cdot B\cdot C)$$
$$=P(A)\cdot P(B)\cdot P(\overline{C})+P(A)\cdot P(\overline{B})\cdot P(C)+P(\overline{A})\cdot P(B)\cdot P(C)$$
$$=2\times 0.90\times 0.95\times 0.05+0.10\times 0.95\times 0.95=0.176$$

答：恰有一件不合格的概率为 0.176.

解法一：至少有两件不合格的概率为

$$P(A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C})+P(\overline{A}\cdot \overline{B}\cdot \overline{C})+P(\overline{A}\cdot \overline{B}\cdot \overline{C})+P(\overline{A}\cdot \overline{B}\cdot \overline{C})$$
$$=0.90\times 0.05^2+2\times 0.10\times 0.05\times 0.95+0.10\times 0.05^2=0.012$$

解法二：三件产品都合格的概率为

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0.90\times 0.95^2=0.812$$

由（Ⅰ）知，恰有一件不合格的概率为 0.176，所以至有两件不合格的概率为

$1-[P(A\cdot B\cdot C)+0.176]=1-(0.812+0.176)=0.012.$

答：至少有两件不合的概率为 0.012.

（18）在小题主要考查三角函数的图象和单调性、奇偶性等基本知识，以及分析问题和推理计算能力，满 12 分

解：由 $f(x)$是偶函数,得$f(-x)=f(x)$,

即$\sin(-\omega x+\varphi)=\sin(\omega x+\varphi)$,

所以$-\cos\varphi\sin\omega x=\cos\varphi\sin\omega x$

对任意x都成立,且$\omega>0$,所以得$\cos\varphi=0$.

依题设$0 \le \varphi \le \pi$,所以解得$\varphi = \frac{\pi}{2}$.

由$f(x)$的图象关于点M对称,得$f(\frac{3\pi}{4} - x) = -f(\frac{3\pi}{4} + x)$,

取$x = 0$,得$f(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\frac{3\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{3\omega\pi}{4}$,

$\therefore f(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\frac{3\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{3\omega\pi}{4}$,

$\therefore \cos\frac{3\omega\pi}{4} = 0$,又$\omega > 0$,得$\frac{3\omega\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 1,2,3,\cdots$,

$\therefore \omega = \frac{2}{3}(2k+1), k = 0,1,2,\cdots$.

当$k = 0$时,$\omega = \frac{2}{3}, f(x) = \sin(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2})$在$[0, \frac{\pi}{2}]$上是减函数;

当$k = 1$时,$\omega = 2, f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$在$[0, \frac{\pi}{2}]$上是减函数;

当$k \ge 0$时,$\omega = \frac{10}{3}, f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{2})$在$[0, \frac{\pi}{2}]$上不是单调函数;

所以,综合得$\omega = \frac{2}{3}$或$\omega = 2$.

19．本小题主要考查线面关系和直棱柱等基础知识，同时考查空间想象能力和推理运算能力．满分 12 分．

解法一：（Ⅰ）解：连结 BG，则 BG 是 BE 在面 ABD 的射影，即∠EBG 是 A_1B 与平面 ABD 所成的角．

设 F 为 AB 中点，连结 EF、FC，

$\because D, E$分别是CC_1, A_1B的中点,又$DC \perp$平面ABC,$\therefore CDEF$为矩形

连结DE,G是ΔADB的重心,$\therefore G \in DF$.在直角三角形EFD中

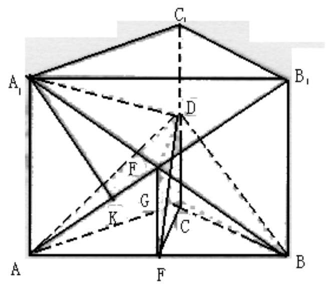
$EF^2 = FG \cdot FD = \frac{1}{3}FD^2, \because EF = 1, \therefore FD = \sqrt{3}$.

于是$ED = \sqrt{2}, EG = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\because FC = CD = \sqrt{2}, \therefore AB = 2\sqrt{2}, A_1B = 2\sqrt{3}, EB = \sqrt{3}$.

$\therefore \sin\angle EBG = \frac{EG}{EB} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore A_1B$与平面ABD所成的角是$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.



（Ⅱ）连结 A_1D，有 $V_{A_1-AED} = V_{D-AA_1E}$

$\because ED \perp AB, ED \perp EF$,又$EF \cap AB = F$,

$\therefore ED \perp$平面A_1AB，　设 A_1 到平面 AED 的距离为 h，

则 $S_{\Delta AED} \cdot h = S_{\Delta A_1AB} \cdot ED$

又$S_{\Delta A_1AE} = \frac{1}{2}S_{\Delta A_1AB} = \frac{1}{4}A_1A \cdot AB = \sqrt{2}, S_{\Delta AED} = \frac{1}{2}AE \cdot ED = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\therefore h = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.即$A_1$到平面$AED$的距离为$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

解法二：（Ⅰ）连结 BG，则 BG 是 BE 在面 ABD 的射影，即$\angle A_1BG$是 A_1B 与平 ABD 所成的角．

如图所示建立坐标系，坐标原点为 O，设 CA=2a，

则 A(2a, 0, 0), B(0, 2a, 0), D(0, 0, 1)

$A_1(2a,0,2), E(a,a,1), G(\frac{2a}{3},\frac{2a}{3},\frac{1}{3}).$

$\therefore \overrightarrow{CE}=(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{2}{3}), \overrightarrow{BD}=(0,-2a,1).$ $\quad\quad \therefore \overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{BD}=-\frac{2}{3}a^2+\frac{2}{3}=0.$解得$a=1.$

$\therefore \overrightarrow{BA_1}=(2,-2,2), \overrightarrow{BG}=(\frac{2}{3},-\frac{4}{3},\frac{1}{3}).$

$\therefore \cos\angle A_1BG=\frac{\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BG}}{|\overrightarrow{BA_1}||\overrightarrow{BG}|}=\frac{14/3}{2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{7}}{3}.$

A_1B与平面ABD所成角是$\arccos\frac{\sqrt{7}}{3}.$

（Ⅱ）由（Ⅰ）有 A(2, 0, 0) A_1(2, 0, 2), E(1, 1, 1), D(0, 0, 1)

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{ED}=(-1,1,1)\cdot(-1,-1,0)=0,$

$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{ED}=(0,0,2)\cdot(-1,-1,0)=0,$

$\therefore ED\perp$平面AA_1E,又$ED\subset$平面$AED.$

（Ⅰ）当$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，方程①是圆方程，故不存在合乎题意的定点 E 和 F；

（Ⅱ）当$0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$时，方程①表示椭圆，焦点$E(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},\frac{a}{2})$和$F(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},\frac{a}{2})$

（Ⅲ）当$a>\frac{\sqrt{2}}{2}$时,方程①也表示椭圆，焦点$E(0,\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}))$和$F(0,\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}))$为合乎题意的两个定点.

（21）本小题主要考查导数、不等式证明等知识，考查综合运用所数学知识解决问题的能力，满分 12 分.

证明：（Ⅰ）因为$(x-a)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\ (-a)^{n-k}x^k$，

所以$y'=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k(-a)^{n-k}x^{k-1}=\sum_{k=0}^{n}n\ C_{n-1}^{k-1}(-a)^{n-k}x^{k-1}=n(x-a)^{n-1}.$

（Ⅱ）对函数$f_n(x)=x^n-(x-a)^n$求导数：

$f_n'(x)=nx^{n-1}-n(x-a)^{n-1},$

所以$f_n'(n)=n[n^{n-1}-(n-a)^{n-1}].$

当$x\geq a>0$时$,f_n'(x)>0.$

$\therefore$当$x\geq a$时$,f_n(x)=x^n-(x-a)^n$是关于x的增函数.

因此,当$n\geq a$时$,(n+1)^n-(n+1-a)^n>n^n-(n-a)^n$

$$\therefore f_{n+1}'(n+1)=(n+1)[(n+1)^n-(n+1-a)^n]>(n+1)(n^n-(n-a)^n)$$

$$>(n+1)(n^n-n(n-a)^{n-1})=(n+1)f_n'(n).$$

即对任意$n\geq a, f_{n+1}'(n+1)>(n+1)f_n'(n).$

22．本小题主要考查二次函数、数列、不等式等基础知识，综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力，满分 14 分.

（Ⅰ）解：$\because Q_n(a_{n-1},a_n^2),P_{n+1}(\frac{1}{a}\cdot a_n^2,a_n^2),Q_{n+1}(\frac{1}{a}\cdot a_n^2,\frac{1}{a^2}a_n^4)$.

$$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{a}\cdot a_n^2,\quad \therefore a_n=\frac{1}{a}\cdot a_{n-1}^2=\frac{1}{a}(\frac{1}{a}\cdot a_{n-2}^2)^2=(\frac{1}{a})^{1+2}a_{n-2}^{2^2}$$

$$=(\frac{1}{a})^{1+2}(\frac{1}{a}\cdot a_{n-3}^2)^{2^2}=(\frac{1}{a})^{1+2+2^2}a_{n-2}^{2^3}=\cdots$$

$$=(\frac{1}{a})^{1+2+\cdots+2^{n-2}}a_1^{2^{n+1}}=(\frac{1}{a})^{2^{n-1}-1}a_1^{2^{n-1}}=a(\frac{a_1}{a})^{2^{n-1}},\qquad \therefore a_n=a(\frac{a_1}{a})^{2^{n-1}}.$$

（Ⅱ）证明：由 a=1 知 $a_{n+1}=a_n^2$，　$\because a_1\le\frac{1}{2}$，　$\therefore a_2\le\frac{1}{4},a_3\le\frac{1}{16}$.

$\because$ 当 $k\ge 1$ 时, $a_{k+2}\le a_3\le\frac{1}{16}$.

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}\le\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=\frac{1}{16}(a_1-a_{n+1})<\frac{1}{32}.$$

（Ⅲ）证明：由（Ⅰ）知，当 a=1 时，$a_n=a_1^{2^{n-1}}$，

$$因此\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}=\sum_{k=1}^{n}(a_1^{2^{k-1}}-a_1^{2^k})a_1^{2^{k+1}}\le\sum_{i=1}^{2^n-1}(a_1^i-a_1^{i+1})a_1^{2i+2}$$

$$=(1-a_1)a_1^2\sum_{i=1}^{2^n-1}a_1^{3i}<(1-a_1)a_1^2\cdot\frac{a_1^3}{1-a_1^3}=\frac{a_1^5}{1+a_1+a_1^2}<\frac{1}{3}.$$