绝密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**试卷类型：B**

2011年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（文科）

本试题共4页，21小题，满分150分，考试用时120分钟。

注意事项： 1．答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。

2．选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4．作答选做题时，请先用2B铅笔填涂选做题的题号对应的信息点，再作答。漏涂、错涂、多涂的，答案无效。

5．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

参考公式： 锥体体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 为锥体的底面积，h 为锥体的高.

线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中系数计算公式 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$，

样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的标准差，$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$，

其中 $\overline{x}$，$\overline{y}$ 表示样本均值.

n 是正整数，则 $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，满分50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设复数 z 满足 $iz=1$，其中 i 为虚数单位，则 $z=$

A．$-i$　　B．i　　C．-1　　D．1

【解析】A. 由题得 $z=\frac{1}{i}=\frac{-i}{i\times(-i)}=-i$ **所以选A.**

2．已知集合 $A=\{(x,y)\,|\,x,y$ 为实数，且 $x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x,y$ 为实数，且 $x+y=1\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

【解析】C. 方法一：由题得$\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+y=1\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$，$A\cap B=\{(x,y)\,|\,(1,0),(0,1)\}$，所以选C.

方法二：直接作出单位圆$x^2+y^2=1$和直线$x+y=1$，观察得两曲线有两个交点，所以选C.

3．已知向量$\boldsymbol{a}=(1,2),\boldsymbol{b}=(1,0),\boldsymbol{c}=(3,4)$．若$\lambda$为实数，$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\,/\!/\,\boldsymbol{c}$，则$\lambda=$

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．2

【解析】B. $\vec{a}+\lambda\vec{b}=(1,2)+(\lambda,0)=(1+\lambda,2)$，$\because(\vec{a}+\lambda\vec{b})/\!/\vec{c}$

$\therefore(1+\lambda)\times4-2\times3=0\quad\therefore\lambda=\frac{1}{2}$

所以选B.

4．函数$f(x)=\frac{1}{1-x}+\lg(1+x)$的定义域是

A．$(-\infty,-1)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(-1,1)\cup(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,+\infty)$

【解析】C. 由题得$\begin{cases}1-x\neq0\\x+1>0\end{cases}$　$\therefore x>-1且x\neq1$　$\therefore$函数的定义域为（$-1,1)\bigcup(1,+\infty$），所以选C.

5．不等式$2x^2-x-1>0$的解集是

A．$(-\frac{1}{2},1)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　D．$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$

【解析】D由题得$2x^2-x-1>0\Rightarrow(x-1)(2x+1)>0\Rightarrow x<-\frac{1}{2}$或$x>1$，则不等式的解集为$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$

6．已知平面直角坐标系xOy上的区域D由不等式组$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\y\leqslant2\\x\leqslant\sqrt{2}y\end{cases}$给定．若$M(x,y)$为$D$上的动点，点$A$的坐标为$(\sqrt{2},1)$，则$z=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}$的最大值为

A．3　　B．4　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{2}$

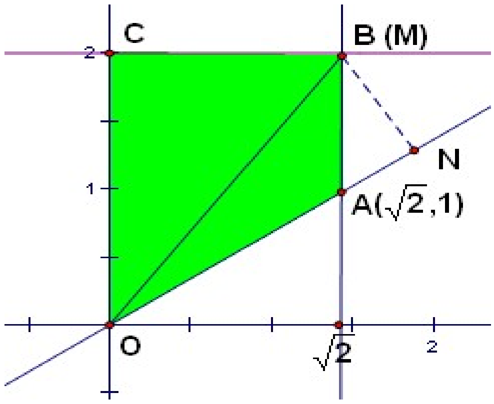
【解析】B由题知不等式组表示的平面区域D是如图中的梯形OABC,

$z=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cos\angle AOM=\sqrt{3}\,|\overrightarrow{OM}|\cos\angle AOM=\sqrt{3}\,|\overrightarrow{ON}|$，所以就是求$|\overrightarrow{ON}|$

的最大值，$|\overrightarrow{ON}|$表示$\overrightarrow{OM}$在$\overrightarrow{OA}$方向上的投影，数形结合观察得当点M在点B的地方时，$|\overrightarrow{ON}|$才最大。

在ΔAOM中，OA=$\sqrt{\sqrt{2}^2+1}=\sqrt{3}$，OB=$\sqrt{\sqrt{2}^2+4}=\sqrt{6}$，AB=2−1=1，$\therefore \cos\angle AOM=\dfrac{\sqrt{3}^2+\sqrt{6}^2-1^2}{2\bullet\sqrt{3}\bullet\sqrt{6}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$

，所以$z_{\max}=\sqrt{3}\bullet\sqrt{6}\bullet\dfrac{2}{3}\sqrt{2}=4$，所以选择B



7．正五棱柱中，不同在任何侧面且不同在任何底面的两顶点的连线称为它的对角线，那么一个正五棱柱对角线的条数共有

A．20　　　　B．15　　　　C．12　　　　D．10

【解析】D正五棱柱中，上底面中的每一个顶点均可与下底面中的两个顶点构成对角线，所以一个正五棱柱对角线的条数共有$5\times2=10$条

8．设圆C与圆$x^2+(y-3)^2=1$外切，与直线$y=0$相切，则C的圆心轨迹为

A．抛物线　　　　B．双曲线　　　　C．椭圆　　　　D．圆

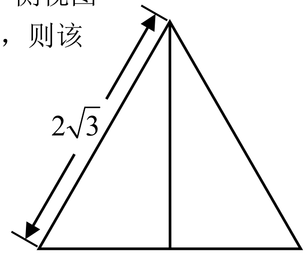
【解析】A.设圆C圆心C(x,y)，半径为R，A(0,3)，点C到直线y=0的距离为|CB|，由题得

$|CA|=R+1=y+1 \quad \therefore \sqrt{x^2+(y-3)^2}=y+1 \quad \therefore y=\dfrac{1}{8}x^2+1$，所以圆C的圆心C轨迹是抛物线，所以选A.

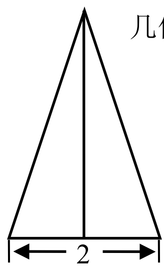
9．如图1、2、3，某几何体的正视图（主视图），侧视图（左视图）和俯视图分别是等边三角形，等腰三角形和菱形，则该几何体的体积为

A．$4\sqrt{3}$　　　　B．4

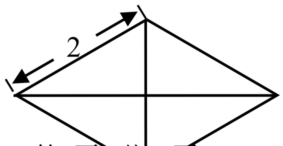
C．$2\sqrt{3}$　　　　D．2



正视图
图1



侧视图
图2

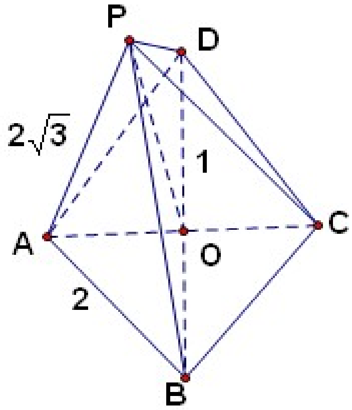


俯视图
图3

【解析】C.由题得该几何体是如图所示的四棱锥P-ABCD，

$AO=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}, \therefore$ 棱锥的高$h=PO=\sqrt{2\sqrt{3}^2-3}=\sqrt{12-3}=3 \quad \therefore V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times 2\times 3=2\sqrt{3}$,

所以选择C.



10．设$f(x), g(x), h(x)$是$\mathbf{R}$上的任意实值函数，如下定义两个函数$(f\circ g)(x)$和$(f\bullet g)(x)$：对任意$x\in\mathbf{R}$，$(f\circ g)(x)=f(g(x))$；$(f\bullet g)(x)=f(x)g(x)$，则下列等式恒成立的是

A．$((f\circ g)\bullet h)(x)=((f\bullet h)\circ(g\bullet h))(x)$

B．$((f\bullet g)\circ h)(x)=((f\circ h)\bullet(g\circ h))(x)$

C．$((f\circ g)\circ h)(x)=((f\circ g)\circ(g\circ h))(x)$

D．$((f\bullet g)\bullet h)(x)=((f\bullet g)\bullet(g\bullet h))(x)$

【解析】B.对A选项 $((f\circ g)\bullet h)(x)=(f\circ g)(x)h(x)=f(g(x))h(x)$

$((f\bullet h)\circ(g\bullet h))(x)=(f\bullet h)((g\bullet h)(x))=(f\bullet h)((g(x)\bullet h(x))$

$=f(g(x)\bullet h(x))h(g(x)\bullet h(x))$，故排除A

对B选项 $((f\bullet g)\circ h)(x)=(f\bullet g)(h(x))=f(h(x))g(h(x))$

$((f\circ h)\bullet(g\circ h))(x)=(f\circ h)(x)(g\circ h)(x)=f(h(x))g(h(x))$，故选B

对C选项 $((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x)))$

$((f\circ g)\circ(g\circ h))(x)=(f\circ g)((g\circ h)(x))=(f\circ g)(g(h(x)))$

$=f(g(g(h(x))))$，故排除C

对D选项 $((f\bullet g)\bullet h)(x)=(f\bullet g)(x)h(x)=f(x)g(x)h(x)$

$((f\bullet g)\bullet(g\bullet h))(x)=(f\bullet g)(x)(g\bullet h)(x)=f(x)g(x)g(x)h(x)$，故排除D

二、填空题：本大题共5小题，考生作答4小题，每小题5分，满分20分.

（一）必做题（9 ~ 13题）

11．已知$\{a_n\}$是递增的等比数列，若$a_2=2$，$a_4-a_3=4$，则此数列的公比$q=$______________

.

【解析】2.

$$a_4-a_3=4\Rightarrow a_2q^2-a_2q=4\Rightarrow 2q^2-2q-4=0\Rightarrow 2(q-2)(q+1)=0\Rightarrow q=2\text{或}q=-1$$

$\because \{a_n\}$是递增的等比数列，$\therefore q=2$

12．设函数$f(x)=x^3\cos x+1$．若$f(a)=11$，则$f(-a)=$______________.

【解析】-9

$f(a)=a^3\cos a+1=11$，即$f(a)=a^3\cos a=10$，

则$f(-a)=(-a)^3\cos(-a)+1=-a^3\cos a+1=-10+1=-9$

13．为了解篮球爱好者小李的投篮命中率与打篮球时间之间的关系，下表记录了小李某月1号到5号每天打篮球时间x（单位：小时）与当天投篮命中率y之间的关系：

时间x	1	2	3	4	5
命中率y	0.4	0.5	0.6	0.6	0.4

小李这5天的平均投篮命中率为________________

；用线性回归分析的方法，预测小李该月6号打6小时篮球的投篮命中率为______________.

【解析】0.5;0.53由题得小李这 5天的平均投篮命中率为$\dfrac{0.4+0.5+0.6+0.6+0.4}{5}=0.5$

$$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3,\overline{y}=\frac{0.4+0.5+0.6+0.6+0.4}{5}=0.5$$

$$\therefore \hat{b}=\frac{(1-3)(0.4-0.5)+(2-3)(0.5-0.5)+(3-3)(0.6-0.5)+(4-3)(0.6-0.5)+(5-3)(0.4-0.5)}{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}=0.01$$

$$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=0.5-0.01\bullet 3=0.47\quad \therefore \hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}=0.01x+0.47\quad \therefore x=6\text{时},\hat{y}=0.01\bullet 6+0.47=0.53$$

$\therefore$第6个同学6号打篮球6个小时投篮的命中率为0.53.

（二）选做题（14 ~ 15题，考生只能从中选做一题）

14．（坐标系与参数方程选做题）已知两曲线参数方程分别为$\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ $(0\leqslant\theta<\pi)$和

$\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}t^2\\ y=t\end{cases}$ $(t\in\mathbf{R})$，它们的交点坐标为__________.

【解析】$(1,\dfrac{2\sqrt{5}}{5})$.

$\begin{cases}x=\sqrt{5}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$ 表示椭圆 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1\ (-\sqrt{5}<x\le\sqrt{5}且0\le y\le 1)$，$\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}t^2\\ y=t\end{cases}$ 表示抛物线

$y^2=\dfrac{4}{5}x$

$\begin{cases}\dfrac{x^2}{5}+y^2=1(-\sqrt{5}<x\le\sqrt{5}且0\le y\le 1)\\ y^2=\dfrac{4}{5}x\end{cases}\Rightarrow x^2+4x-5=0\Rightarrow x=1$ 或 $x=-5$（舍去），

又因为 $0\le y\le 1$，所以它们的交点坐标为 $(1,\dfrac{2\sqrt{5}}{5})$

15．（几何证明选讲选做题）如图4，在梯形 $ABCD$ 中，$AB\ /\!/\ CD$，$AB=4$，$CD=2$，E,F 分别为 AD,BC 上的点，且 $EF=3$，$EF\ /\!/\ AB$，则梯形 $ABFE$ 与梯形 $EFCD$ 的面积比为________.

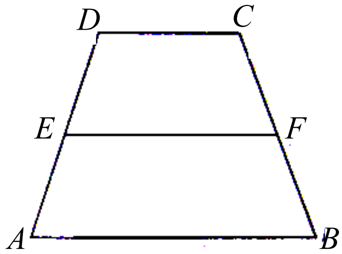
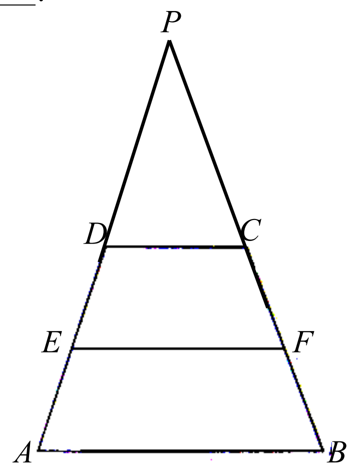


图4

【解析】$\dfrac{7}{5}$　　如图，延长 AD,BC，$AD\bigcap BC=P$



$\because\dfrac{CD}{EF}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore\dfrac{S_{\Delta PCD}}{S_{\Delta PEF}}=\dfrac{4}{9}$

$\because\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{2}{4}$，$\therefore\dfrac{S_{\Delta PCD}}{S_{\Delta PEF}}=\dfrac{4}{16}$

$\therefore\dfrac{S_{梯形ABEF}}{S_{梯形EFCD}}=\dfrac{7}{5}$

三、解答题：本大题共6小题，满分80分．解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤．

16．（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=2\sin(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{\pi}{6})$，$x\in\mathbf{R}$.

（1）求 $f(0)$ 的值；

（2）设 $\alpha,\beta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$f(3\alpha+\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{10}{13}$，$f(3\beta+2\pi)=\dfrac{6}{5}$，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

【解析】（1）$f(0)=2\sin(-\frac{\pi}{6})=-1$

（2）$f(3\alpha+\frac{\pi}{2})=2\sin[\frac{1}{3}(3\alpha+\frac{\pi}{2})-\frac{\pi}{6}]=2\sin\alpha=\frac{10}{13}$，即$\sin\alpha=\frac{5}{13}$

$f(3\beta+2\pi)=2\sin[\frac{1}{3}(3\beta+2\pi)-\frac{\pi}{6}]=2\sin(\beta+\frac{\pi}{2})=\frac{6}{5}$，即$\cos\beta=\frac{3}{5}$

$\because \alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{12}{13}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{4}{5}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{63}{65}$

17．（本小题满分13分）

在某次测验中，有6位同学的平均成绩为75分．用x_n表示编号为n $(n=1,2,\cdots,6)$的同学所得成绩，且前5位同学的成绩如下：

编号n	1	2	3	4	5
成绩x_n	70	76	72	70	72

（1）求第6位同学的成绩x_6，及这6位同学成绩的标准差s；

（2）从前5位同学中，随机地选2位同学，求恰有1位同学成绩在区间（68，75）中的概率．

【解析】（1）$\frac{1}{6}(70+76+72+70+72+x_6)=75$，解得$x_6=90$

标准差$s=\sqrt{\frac{1}{6}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_6-\bar{x})^2]}=\sqrt{\frac{1}{6}(5^2+1^2+3^2+5^2+3^2+15^2)}=7$

（2）前5位同学中随机选出的2位同学记为(a,b)，$a,b\in\{1,2,3,4,5\}$且$a\neq b$

则基本事件有$(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(1,5)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(2,5)$，$(3,4)$，$(3,5)$，$(4,5)$共10种

这5位同学中，编号为1、3、4、5号的同学成绩在区间（68，75）中

设A表示随机事件“从前5位同学中随机选出2位同学，恰有1位同学成绩在区间（68，75）中”

则A中的基本事件有$(1,2)$、$(2,3)$、$(2,4)$、$(2,5)$共4种，则$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

18．（本小题满分13分）

图5所示的几何体是将高为2，底面半径为1的直圆柱沿过轴的平面切开后，将其中一半沿切面向右水平平移后得到的．A,A',B,B'分别为$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{C'D'}$，$\overset{\frown}{DE}$，$\overset{\frown}{D'E'}$的中点，O_1,O_1',O_2,O_2'分别为CD，$C'D'$，

DE，$D'E'$的中点．

（1）证明：O_1',A',O_2,B四点共面；

（2）设 G 为 AA' 中点，延长 $A'O_1{}'$ 到 H'，使得 $O_1{}'H' = A'O_1{}'$．证明：$BO_2{}' \perp$ 平面 $H'B'G$

.

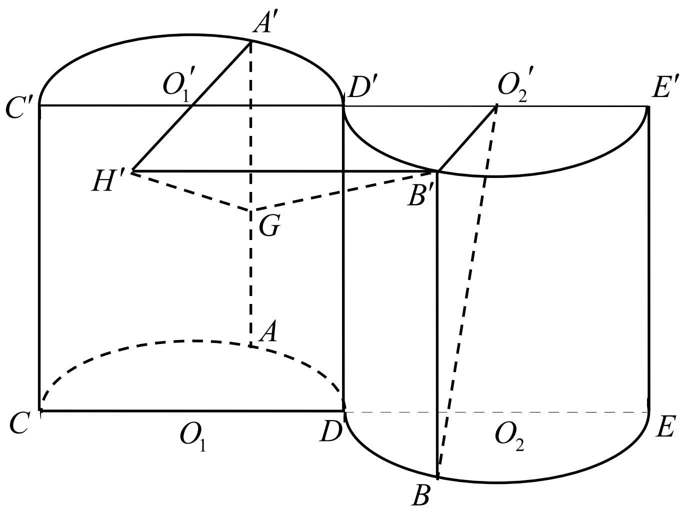
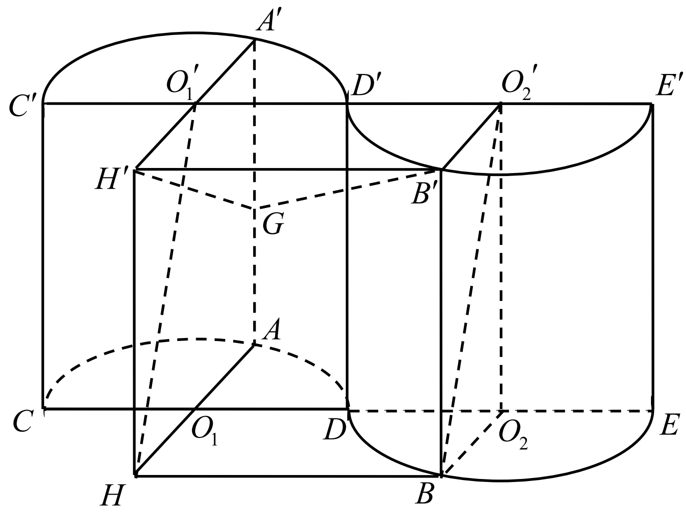


图5



【解析】证明：（1）连接 $BO_2, O_2O_2{}'$,

依题意得 $O_1, O_1{}', O_2, O_2{}'$ 是圆柱底面圆的圆心

$\therefore CD, C'D', DE, D'E'$ 是圆柱底面圆的直径

$\because A', B, B'$ 分别为 $\overset{\frown}{C'D'}$，$\overset{\frown}{DE}$，$\overset{\frown}{D'E'}$ 的中点

$\therefore \angle A'O_1{}'D' = \angle B'O_2{}'D' = 90^\circ$

$\therefore A'O_1{}' \parallel BO_2{}'$

$\because BB' \underset{=}{\parallel} O_2O_2{}'$，四边形 $O_2O_2{}'B'B$ 是平行四边形

$\therefore BO_2 \parallel BO_2{}'$

$\therefore A'O_1{}' \parallel BO_2$

$\therefore O_1{}', A', O_2, B$ 四点共面

（2）延长 $A'O_1$ 到 H，使得 $O_1{}'H = AO_1{}'$，连接 $HH', HO_1{}', HB$

$\because O_1{}'H' = A'O_1{}'$

$\therefore O_1{}'H' \underset{=}{\parallel} O_2{}'B'$，四边形 $O_1{}'O_2{}'B'H'$ 是平行四边形

$\therefore O_1'O_2' \parallel H'B'$

$\because O_1'O_2' \perp O_2O_2'$，$O_1'O_2' \perp B'O_2'$，$O_2O_2' \cap B'O_2' = O_2'$

$\therefore O_1'O_2' \perp$面$O_2O_2'B'B$

$\therefore H'B' \perp$面$O_2O_2'B'B$，$BO_2' \subset$面$O_2O_2'B'B$

$\therefore BO_2' \perp H'B'$

易知四边形$AA'H'H$是正方形，且边长$AA' = 2$

$\because \tan\angle HO_1'H' = \dfrac{HH'}{O_1'H'} = 2$，$\tan\angle A'H'G = \dfrac{A'G}{A'H'} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \tan\angle HO_1'H' \cdot \tan\angle A'H'G = 1$

$\therefore \angle HO_1'H' + \angle A'H'G = 90^\circ$

$\therefore HO_1' \perp H'G$

易知$O_1'O_2' \underline{\parallel} HB$，四边形$O_1'O_2'BH$是平行四边形

$\therefore BO_2' \parallel HO_1'$

$\therefore BO_2' \perp H'G$，$H'G \cap H'B' = H'$

$\therefore BO_2' \perp$平面$H'B'G$.

19. （本小题满分14分）

设$a > 0$，讨论函数$f(x) = \ln x + a(1-a)x^2 - 2(1-a)x$的单调性.

【解析】解：函数$f(x)$的定义域为$(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2a(1-a)x - 2(1-a) = \frac{2a(1-a)x^2 - 2(1-a)x + 1}{x}$$

令$g(x) = 2a(1-a)x^2 - 2(1-a)x + 1$

$\Delta = 4(1-a)^2 - 8a(1-a) = 12a^2 - 16a + 4 = 4(3a-1)(a-1)$

① 当$0 < a < \dfrac{1}{3}$时，$\Delta > 0$，令$f'(x) = 0$，解得$x = \dfrac{1-a \pm \sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$

则当$0<x<\dfrac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$或$x>\dfrac{1-a+\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$时，$f'(x)>0$

当$\dfrac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}<x<\dfrac{1-a+\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$时，$f'(x)<0$

则$f(x)$在$(0,\dfrac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)})$，$(\dfrac{1-a+\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)},+\infty)$上单调递增，

在$(\dfrac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)},\dfrac{1-a+\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)})$上单调递减

② 当$\dfrac{1}{3}\le a\le 1$时，$\Delta\le 0$，$f'(x)\ge 0$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

③ 当$a>1$时，$\Delta>0$，令$f'(x)=0$，解得$x=\dfrac{1-a\pm\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$

$\because x>0$，$\therefore x=\dfrac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$

则当$0<x<\dfrac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$时，$f'(x)>0$

当$x>\dfrac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)}$时，$f'(x)<0$

则$f(x)$在$(0,\dfrac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)})$上单调递增，在$(\dfrac{1-a-\sqrt{(3a-1)(a-1)}}{2a(1-a)},+\infty)$上单调递减

20．（本小题满分14分）

设$b>0$，数列$\{a_n\}$满足$a_1=b$，$a_n=\dfrac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+n-1}\ (n\geqslant 2)$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：对于一切正整数n，$2a_n\leqslant b^{n+1}+1$．

【解析】（1）解：$\because a_n=\dfrac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+n-1}$

$\therefore \dfrac{a_n}{n}=\dfrac{ba_{n-1}}{a_{n-1}+n-1}$

$\therefore \dfrac{n}{a_n}=\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{n-1}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{b}$

① 当$b=1$时，$\dfrac{n}{a_n}-\dfrac{n-1}{a_{n-1}}=1$，则$\{\dfrac{n}{a_n}\}$是以1为首项，1为公差的等差数列

$\therefore \dfrac{n}{a_n}=1+(n-1)\times 1=n$，即$a_n=1$

② 当$b>0$且$b\neq 1$时，$\dfrac{n}{a_n}+\dfrac{1}{1-b}=\dfrac{1}{b}(\dfrac{n-1}{a_{n-1}}+\dfrac{1}{1-b})$

当$n=1$时，$\dfrac{n}{a_n}+\dfrac{1}{1-b}=\dfrac{1}{b(1-b)}$

$\therefore \{\dfrac{n}{a_n}+\dfrac{1}{1-b}\}$是以$\dfrac{1}{b(1-b)}$为首项，$\dfrac{1}{b}$为公比的等比数列

$\therefore \dfrac{n}{a_n}+\dfrac{1}{1-b}=\dfrac{1}{1-b}\cdot(\dfrac{1}{b})^n$

$\therefore \dfrac{n}{a_n}=\dfrac{1}{(1-b)b^n}-\dfrac{1}{1-b}=\dfrac{1-b^n}{(1-b)b^n}$

$\therefore a_n=\dfrac{n(1-b)b^n}{1-b^n}$

综上所述$a_n=\begin{cases}\dfrac{n(1-b)b^n}{1-b^n}, & b>0且b\neq 1\\ 1, & b=1\end{cases}$

（2）证明：① 当$b=1$时，$2a_n=b^{n+1}+1=2$；

② 当$b>0$且$b\neq 1$时，$1-b^n=(1-b)(1+b+\cdots+b^{n-2}+b^{n-1})$

要证$2a_n\leq b^{n+1}+1$，只需证$\dfrac{2n(1-b)b^n}{1-b^n}\leq b^{n+1}+1$，

即证$\dfrac{2n(1-b)}{1-b^n}\leq b+\dfrac{1}{b^n}$

即证$\dfrac{2n}{1+b+\cdots+b^{n-2}+b^{n-1}}\leq b+\dfrac{1}{b^n}$

即证$(b+\dfrac{1}{b^n})(1+b+\cdots+b^{n-2}+b^{n-1})\geq 2n$

即证$(b+b^2+\cdots+b^{n-1}+b^n)+(\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b})\geq 2n$

$\because (b+b^2+\cdots+b^{n-1}+b^n)+(\frac{1}{b^n}+\frac{1}{b^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b})$

$=(b+\frac{1}{b})+(b^2+\frac{1}{b^2})+\cdots+(b^{n-1}+\frac{1}{b^{n-1}})+(b^n+\frac{1}{b^n})$

$\geq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{b}}+2\sqrt{b^2\cdot\frac{1}{b^2}}+\cdots+2\sqrt{b^{n-1}\cdot\frac{1}{b^{n-1}}}+2\sqrt{b^n\cdot\frac{1}{b^n}}=2n$，$\therefore$原不等式成立

$\therefore$对于一切正整数n，$2a_n\leqslant b^{n+1}+1$.

21．（本小题满分14分）

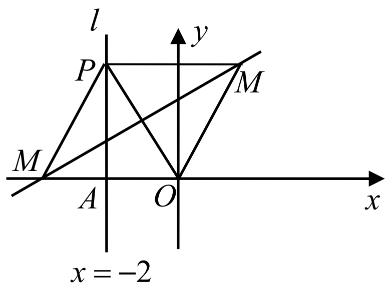
在平面直角坐标系xOy上，直线l：$x=-2$交x轴于点A．设P是l上一点，M是线段OP的垂直平分线上一点，且满足$\angle MPO=\angle AOP$．

（1）当点P在l上运动时，求点M的轨迹E的方程；

（2）已知$T(1,-1)$，设H是E上动点，求$|HO|+|HT|$的最小值，并给出此时点H的坐标；

（3）过点$T(1,-1)$且不平行于y轴的直线l_1与轨迹E有且只有两个不同的交点，求直线l_1的斜率k的取值范围.

【解析】解：（1）如图所示，连接OM，则$|PM|=|OM|$



$\because \angle MPO=\angle AOP$，

$\therefore$动点M满足$MP\perp l$或M在x的负半轴上，设$M(x,y)$

① 当$MP\perp l$时，$|MP|=|x+2|$，$|OM|=\sqrt{x^2+y^2}$

$|x+2|=\sqrt{x^2+y^2}$，化简得$y^2=4x+4\ (x\geq -1)$

② 当M在x的负半轴上时，$y=0\ (x<-1)$

综上所述，点M的轨迹E的方程为$y^2=4x+4\ (x\geq -1)$或$y=0\ (x<-1)$

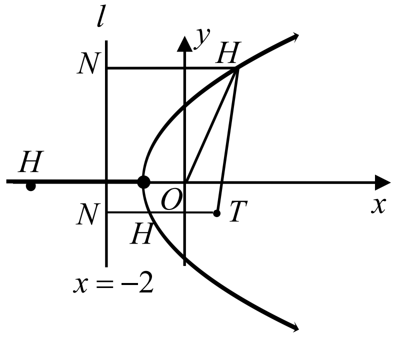
（2）由（1）知M的轨迹是顶点为$(-1,0)$，焦点为原点的抛物线和x的负半轴$y=0$ $(x<-1)$

① 若H是抛物线上的动点，过H作$HN\perp l$于N

由于l是抛物线的准线，根据抛物线的定义有$|HO|=|HN|$

则$|HO|+|HT|=|HN|+|HT|$

当N,H,T三点共线时，$|HN|+|HT|$有最小值$|TN|=3$

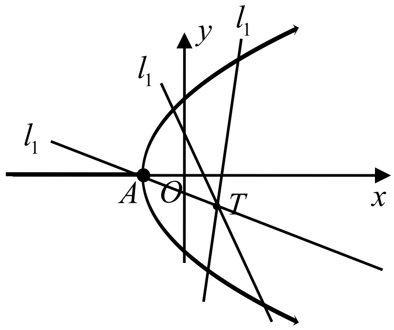


求得此时 H 的坐标为 $(-\frac{3}{4},-1)$

② 若 H 是 x 的负半轴 $y=0\ (x<-1)$ 上的动点

显然有 $|HO|+|HT|>3$

综上所述，$|HO|+|HT|$ 的最小值为3，此时点 H 的坐标为 $(-\frac{3}{4},-1)$



（3）如图，设抛物线顶点 $A(-1,0)$，则直线 AT 的斜率 $k_{AT}=-\frac{1}{2}$

∵点 $T(1,-1)$ 在抛物线内部，

∴过点 T 且不平行于 x,y 轴的直线 l_1 必与抛物线有两个交点

则直线 l_1 与轨迹 E 的交点个数分以下四种情况讨论：

① 当 $k\le-\frac{1}{2}$ 时，直线 l_1 与轨迹 E 有且只有两个不同的交点

② 当 $-\frac{1}{2}<k<0$ 时，直线 l_1 与轨迹 E 有且只有三个不同的交点

③ 当 $k=0$ 时，直线 l_1 与轨迹 E 有且只有一个交点

④ 当 $k>0$ 时，直线 l_1 与轨迹 E 有且只有两个不同的交点

综上所述，直线 l_1 的斜率 k 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{1}{2}]\cup(0,+\infty)$