

## 2021年上海市夏季高考数学试卷

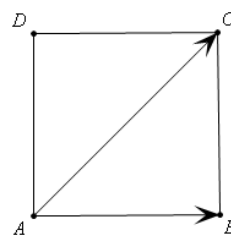
一、填空题（本大题共12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分）

1. 已知  $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 3i$ （其中  $i$  为虚数单位），则  $z_1 + z_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2. 已知  $A = \{x | 2x \leq 1\}, B = \{-1, 0, 1\}$ ，则  $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 若  $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ ，则圆心坐标为  $\underline{\hspace{2cm}}$

4. 如图边长为3的正方形  $ABCD$ ，则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$



5. 已知  $f(x) = \frac{3}{x} + 2$ ，则  $f^{-1}(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 已知二项式  $(x+a)^5$  的展开式中， $x^2$  的系数为 80，则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

7. 已知  $\begin{cases} x \leq 3 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \\ 3x + y - 8 \geq 0 \end{cases}$ ，目标函数  $z = x - y$ ，则  $z$  的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$

8. 已知无穷递缩等比数列  $a_1 = 3, b_n = a_{2n}$ ， $\{a_n\}$  的各项和为 9，则数列  $\{b_n\}$  的各项和为  $\underline{\hspace{2cm}}$

9. 在圆柱底面半径为 1，高为 2， $AB$  为上底底面的直径，点  $C$  是下底底面圆弧上的一个动点，点  $C$  绕着下底底面旋转一周，则  $\triangle ABC$  面积的范围  $\underline{\hspace{2cm}}$

10. 甲、乙两人在花博会的 A、B、C、D 不同展馆中各选 2 个去参观，则两人选择中恰有一个馆相同的概率为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

11. 已知抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$ ，若第一象限的点  $A, B$  在抛物线上，抛物线焦点为  $F$ ，

$|AF| = 2, |BF| = 4, |AB| = 3$ ，则直线  $AB$  的斜率为  $\underline{\hspace{2cm}}$

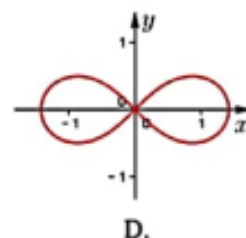
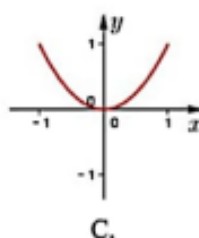
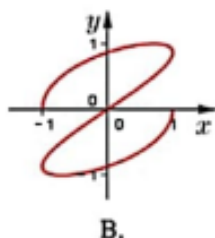
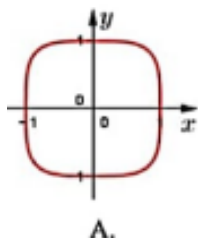
12. 已知  $a_i \in \mathbb{N}^* (i = 1, 2, \dots, 9)$ ，且对任意  $k \in \mathbb{N}^* (2 \leq k \leq 8)$  都有  $a_k = a_{k-1} + 1$  或  $a_k = a_{k-1} - 1$  中有且仅有一个成立， $a_1 = 6, a_9 = 9$ ，则  $a_1 + \dots + a_9$  的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

二、选择题（本大题共有4题，每题5分，满分20分）

13. 以下哪个函数既是奇函数，又是减函数（ ）

A.  $f(x) = -3x$     B.  $f(x) = x^3$     C.  $f(x) = \log_3 x$     D.  $f(x) = 3^x$

14. 已知参数方程  $\begin{cases} x = 3t - 4t^3 \\ y = 2t + \sqrt{1-t^2} \end{cases} (t \in [-1, 1])$ ，以下哪个图像是该方程的图像（ ）



15. 已知  $f(x) = 3\sin x + 2$ ，对于任意的  $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，都存在  $x_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，使得

$f(x_1) + 2f(x_2 + \theta) = 3$  成立，则下列选项中， $\theta$  可能的值是（ ）

A.  $\frac{3\pi}{5}$     B.  $\frac{4\pi}{5}$     C.  $\frac{6\pi}{5}$     D.  $\frac{7\pi}{5}$

16. 已知两两不同的  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  满足  $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$ ,

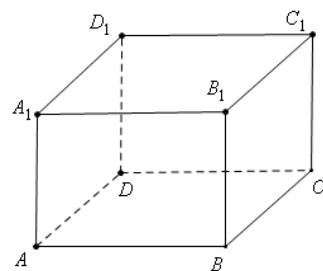
且  $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3, x_1y_1 + x_3y_3 = 2x_2y_2 > 0$ , 则下列选项中恒成立的是 ( )

- A.  $2x_2 < x_1 + x_3$     B.  $2x_2 > x_1 + x_3$     C.  $x_2^2 < x_1x_3$     D.  $x_2^2 > x_1x_3$

**三、解答题** (本大题共有5题, 满分76分, 解答下列各题必须写出必要的步骤)

17、如图, 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB = BC = 2, AA_1 = 3$

- (1) 若  $P$  是边  $A_1D_1$  的动点, 求三棱锥  $P - ADC$  的体积;  
 (2) 求  $AB_1$  与平面  $ACC_1A_1$  所成的角的大小.



18、在  $\Delta ABC$  中, 已知  $a = 3, b = 2c$

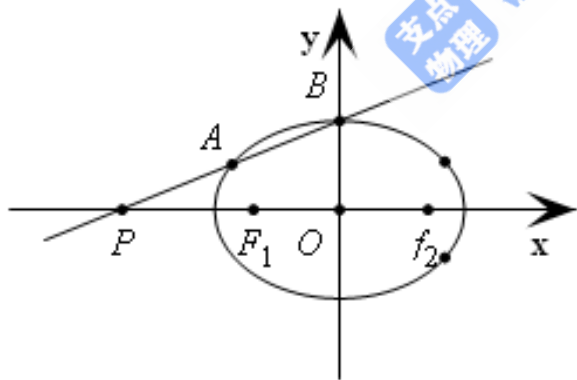
- (1) 若  $\angle A = \frac{2\pi}{3}$ , 求  $\Delta ABC$  的面积;    (2) 若  $2\sin B - \sin C = 1$ , 求  $\Delta ABC$  的周长.

19. 已知某企业今年 (2021年) 第一季度的营业额为1.1亿元, 以后每个季度 (一年有四个季度) 营业额都比前一季度多0.05亿元, 该企业第一季度是利润为0.16亿元, 以后每一季度的利润都比前一季度增长4%.

- (1) 求2021第一季度起20季度的营业额总和;  
 (2) 问哪一年哪个季度的利润首次超过该季度营业额的18%?

20、已知  $\Gamma: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, F_1, F_2$  是其左右焦点,  $P(m, 0) (m < -\sqrt{2})$ , 直线  $l$  过点  $P$  交  $\Gamma$  于  $A, B$  两点, 且  $A$  在线段  $BP$  上.

- (1) 若  $B$  是上顶点,  $|\overrightarrow{BF_1}| = |\overrightarrow{PF_1}|$ , 求  $m$  的值;  
 (2) 若  $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_2A} = \frac{1}{3}$ , 且原点  $O$  到直线  $l$  的距离为  $\frac{4\sqrt{15}}{15}$ , 求直线  $l$  的方程;  
 (3) 证明: 证明: 对于任意  $m < -\sqrt{2}$ , 总存在唯一一条直线使得  $\overrightarrow{F_1A} \parallel \overrightarrow{F_2B}$ .



21、如果对任意  $x_1, x_2 \in I$  使得  $x_1 - x_2 \in S$  都有  $f(x_1) - f(x_2) \in S$ , 则称  $f(x)$  是  $S$  关联的.

- (1) 判断并证明  $f(x) = 2x - 1$  是否是  $[0, +\infty)$  关联? 是否是  $[0, 1]$  关联?  
 (2)  $f(x)$  是  $\{3\}$  关联的, 在  $[0, 3)$  上有  $f(x) = x^2 - 2x$ , 解不等式  $2 \leq f(x) \leq 3$ ;  
 (3) " $f(x)$  是  $\{3\}$  关联的, 且是  $[0, +\infty)$  关联" 当且仅当 " $f(x)$  是  $[1, 2]$  关联的".