

# 2000 年山东高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。第 I 卷 1 至 2 页。第 II 卷 3 至 9 页。共 150 分。考试时间 120 分钟。

## 第 I 卷(选择题共 60 分)

### 注意事项:

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答, 不能答在试题卷上。
3. 考试结束, 监考人将本试卷和答题卡一并收回。

### 参考公式:

三角函数的积化和差公式

正棱台、圆台的侧面积公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

其中  $c'$ 、 $c$  分别表示上、下底

面周长,  $l$  表示斜高或母线长

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$V_{\text{台}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

其中  $S'$ 、 $S$  分别表

示上、下底面积,  $h$  表示高

一、选择题: 本大题共 12 分, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合  $A$  和  $B$  都是自然数集合  $N$ , 映射  $f: A \rightarrow B$  把集合  $A$  中的元素  $n$  映射到集合  $B$  中的元素  $2^n + n$ , 则在映射  $f$  下, 象 20 的原象是 ( )

- (A) 2                      (B) 3                      (C) 4                      (D) 5

(2) 在复平面内, 把复数  $3 - \sqrt{3}i$  对应的向量按顺时针方向旋转  $\frac{\pi}{3}$ , 所得向量对应的复数是

- (A)  $2\sqrt{3}$                       (B)  $-2\sqrt{3}i$                       (C)  $\sqrt{3} - 3i$                       (D)  $3 + \sqrt{3}i$

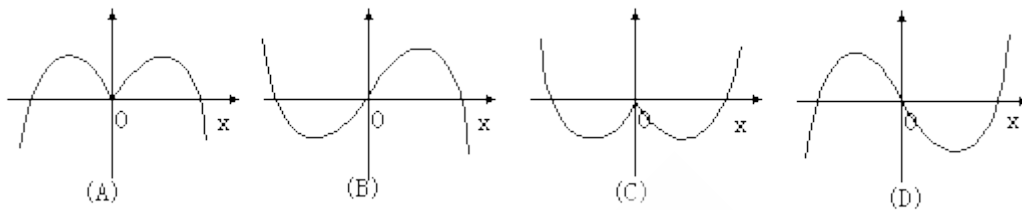
(3) 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ ，这个长方体对角线的长是

- (A)  $2\sqrt{3}$       (B)  $3\sqrt{2}$       (C) 6      (D)  $\sqrt{6}$

(4) 已知  $\sin \alpha > \sin \beta$ ，那么下列命题成立的是

- (A) 若  $\alpha, \beta$  是第一象限角，则  $\cos \alpha > \cos \beta$   
 (B) 若  $\alpha, \beta$  是第二象限角，则  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$   
 (C) 若  $\alpha, \beta$  是第三象限角，则  $\cos \alpha > \cos \beta$   
 (D) 若  $\alpha, \beta$  是第四象限角，则  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$

(5) 函数  $y = -x \cos x$  的部分图象是



(6) 《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税，超过 800 元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分档累进计算。

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
...	...

某人一月份应交纳此项税款 26.78 元，则他的当月工资、薪金所得介于

- (A) 800~900 元      (B) 900~1200 元      (C) 1200~1500 元      (D) 1500~2800 元

(7) 若  $a > b > 1$ ， $P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$ ， $Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$ ， $R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ，则

- (A)  $R < P < Q$       (B)  $P < Q < R$       (C)  $Q < P < R$       (D)  $P < R < Q$

(8) 以极坐标中的点  $(1, 1)$  为圆心，1 为半径的圆的方程是

(A)  $\rho = 2 \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$

(B)  $\rho = 2 \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$

(C)  $\rho = 2 \cos(\theta - 1)$

(D)  $\rho = 2 \sin(\theta - 1)$

(9) 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形，这个圆柱的全面积与侧面积的比是

(A)  $\frac{1+2\pi}{2\pi}$

(B)  $\frac{1+4\pi}{4\pi}$

(C)  $\frac{1+2\pi}{\pi}$

(D)  $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

(10) 过原点的直线与圆  $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$  相切，若切点在第三象限，则该直线的方程是

(A)  $y = \sqrt{3}x$

(B)  $y = -\sqrt{3}x$

(C)  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

(D)  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

(11) 过抛物线  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ

的长分别是 p、q，则  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  等于

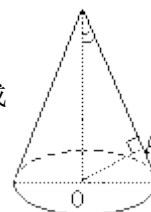
(A) 2a

(B)  $\frac{1}{2a}$

(C) 4a

(D)  $\frac{4}{a}$

(12) 如图，OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线，OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分，则母线与轴的夹角为



(A)  $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$

(B)  $\arccos \frac{1}{2}$

(C)  $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$

(D)  $\arccos \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

第 II 卷 (非选择题共 90 分)

注意事项:

- 第 II 卷共 7 页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。
- 答卷前将密封线内的项目填写清楚。

题号	二	三						总分
		17	18	19	20	21	22	
分数								

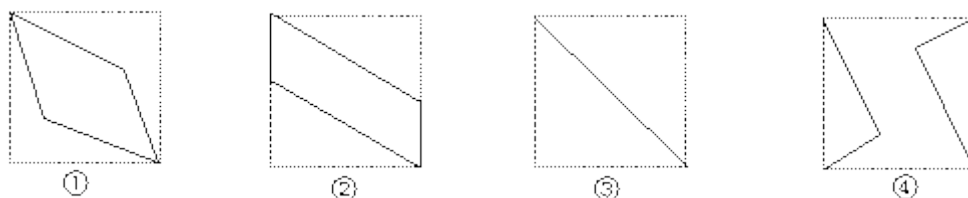
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在题中横线上。

(13) 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员，派 5 名参加比赛，3 名主力队员要安排在第一、第三、五位置，其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置，那么不同的出场安排共有 \_\_\_\_\_ 种（用数字作答）

(14) 椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  的焦点为  $F_1, F_2$ ，点 P 为其上的动点。当  $\angle F_1PF_2$  为钝角时，点 P 横坐标的取值范围是 \_\_\_\_\_。

(15) 设  $\{a_n\}$  是首项为 1 的正项数列，且  $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )，则它的通项公式是  $a_n =$  \_\_\_\_\_。

(16) 如图，E、F 分别为正方体的面  $ADD_1A_1$ 、面  $BCC_1B_1$  的中心，则四边形  $BFD_1E$  在正方体的面上的射影可能是 \_\_\_\_\_。



都  
(要求：把可能的图的序号填上)

三、解答题：本大题共 16 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(17) (本小题满分 12 分)

已知函数  $y = \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + 1, x \in \mathbb{R}$

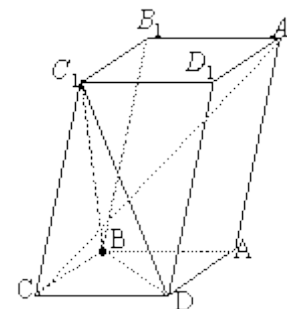
(I) 当函数 y 取得最大值时，求自变量 x 的集合；

(II) 该函数的图象可由  $y = \sin x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到？

(18) (本小题满分 12 分)

如图，已知平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的底面 ABCD 是菱形，且

$$\angle C_1CB = \angle C_1CD = \angle BCD = 60^\circ$$



(I) 证明：  $C_1C \perp BD$ ；

(II) 假定  $CD=2$ ,  $\frac{CC_1}{CD} = \frac{3}{2}$ , 记面  $C_1BD$  为  $\alpha$ , 面  $CBD$  为  $\beta$ , 求二面角  $\alpha - BD - \beta$  的平面角的余弦值;

(III) 当  $\frac{CD}{CC_1}$  的值为多少时, 能使  $A_1C \perp \text{平面} C_1BD$ ? 请给出证明。

(19) (本小题满分 12 分)

设函数  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax$ , 其中  $a > 0$ 。

(I) 解不等式  $f(x) \leq 1$ ;

(II) 求  $a$  的取值范围, 使函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty]$  上是单调函数。

(20) (本小题满分 12 分)

(I) 已知数列  $\{c_n\}$ , 其中  $c_n = 2^n + 3^n$ , 且数列  $\{c_{n+1} - pc_n\}$  为等比数列, 求常数  $p$ ;

(II) 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是公比不相等的两个等比数列,  $c_n = a_n + b_n$ , 证明数列  $\{c_n\}$  不是等比数列。

(21) (本小题满分 12 分)

某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿市场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示。

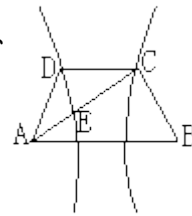
(I) 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系  $P=f(t)$ ; 写出图二表示的种植成本与时间的函数关系式  $Q=g(t)$ ;

(II) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大?



(注: 市场售价和种植成本的单位:  $\frac{\text{元}}{10^3 \text{kg}}$ , 时间单位: 天)

如图, 已知梯形 ABCD 中  $|AB|=2|CD|$ , 点 E 分有向线段  $\overline{AC}$  所成的比为  $\lambda$ , 双曲线过 C、



D、E 三点, 且以 A、B 为焦点。当  $\frac{3}{2} \leq \lambda \leq \frac{3}{4}$  时, 求双曲线离心率 e 的取值范围。

### 参考解答及评分标准

#### 说明:

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力, 并给出了一种或几种解法供参考, 如果考生的解法与本解答不同, 可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对计算题, 当考生的解答在某一步出现错误时, 如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度, 可视影响的程度决定后继部分的给分, 但不得超过该部分正确解答应得分数的一半; 如果后继部分的解答有较严重的错误, 就不再给分。

三、解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数, 选择题和填空题不给中间分。

#### 一、选择题: 本题考查基本知识和基本运算, 每小题 5 分, 满分 60 分。

- (1) C      (2) B      (3) D      (4) D      (5) D      (6) C      (7) B      (8) C  
 (9) A      (10) C      (11) C      (12) D

#### 二、填空题: 本题考查基本知识和基本运算, 每小题 4 分, 满分 16 分。

- (13) 252      (14)  $-\frac{3}{\sqrt{5}} < x < \frac{3}{\sqrt{5}}$       (15)  $\frac{1}{n}$       (16) ②③

#### 三、解答题

(17) 本小题主要考查三角函数的图象和性质, 考查利用三角公式进行恒等变形的技能以及运算能力。满分 12 分。

解: (I)

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + 1 \\
 &= \frac{1}{4} (2 \cos^2 x - 1) + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} (2 \sin x \cos x) + 1 \\
 &= \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x + \frac{5}{4} = \frac{1}{2} (\cos 2x \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \sin 2x \cdot \cos \frac{\pi}{6}) + \frac{5}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

.....6 分

$y$  取得最大值必须且只需  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  即  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  所以当函数  $y$  取得最

大值时, 自变量  $x$  的集合为  $\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  .....8 分

(II) 将函数  $y = \sin x$  依次进行如下变换: (i) 把函数  $y = \sin x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$ , 得到函

数  $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$  的图象; (ii) 把得到的图象上各点横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍 (纵坐标不

变), 得到函数  $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$  的图象; (iii) 把得到的图象上各点纵坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$

倍 (横坐标不变), 得到函数  $y = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6})$  的图象 (iv) 把得到的图象向上平移  $\frac{5}{4}$  个单

位长度, 得到函数  $y = \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + \frac{5}{4}$  的图象;

综上所述得到函数  $y = \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x + 1$  的图象。.....12 分

(18) 本小题主要考查直线与直线、直线与平面的关系, 逻辑推理能力, 满分 12 分。

(I) 证明: 连结  $A_1C_1$ 、 $AC$ ,  $AC$  和  $BD$  交于  $O$ , 连结  $C_1O$

$\because$  四边形  $ABCD$  是菱形

$\therefore AC \perp BD, BC = CD$

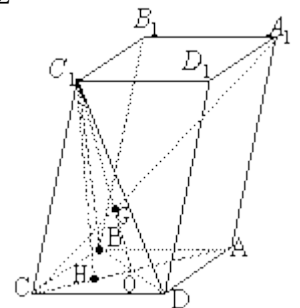
又  $\because \angle BCC_1 = \angle DCC_1, C_1C = C_1C$

$\therefore \triangle C_1BC \cong \triangle C_1DC$

$\therefore C_1B = C_1D$

$\because DO = OB$

$\therefore C_1O \perp BD$  .....2 分



但  $AC \perp BD$ ,  $AC \cap C_1O = O$

$\therefore BD \perp \text{平面} AC_1$

又  $C_1C \subset \text{平面} AC_1$

$\therefore C_1C \perp BD$  .....4分

(II) 解: 由 (I) 知  $AC \perp BD$ ,  $C_1O \perp BD$

$\therefore \angle C_1OC$  是二面角  $\alpha - BD - \beta$  的平面角

在  $\triangle C_1BC$  中,  $BC=2$ ,  $C_1C = \frac{3}{2}$ ,  $\angle BC C_1 = 60^\circ$

$\therefore C_1B^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times 2 \times \frac{3}{2} \times \cos 60^\circ = \frac{13}{4}$  .....6分

$\because \angle OCB = 60^\circ$

$\therefore OB = \frac{1}{2}BC = 1$

$\therefore C_1O^2 = C_1B^2 - OB^2 = \frac{13}{4} - 1 = \frac{9}{4}$

$\therefore C_1O = \frac{3}{2}$  即  $C_1O = C_1C$

作  $C_1H \perp OC$ , 垂足为 H。

$\therefore$  点 H 是 OC 的中点, 且  $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

所以  $\cos \angle C_1OC = \frac{OH}{C_1O} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。 .....8分

(III) 当  $\frac{CD}{CC_1} = 1$  时, 能使  $A_1C \perp \text{平面} C_1BD$

证明一：  $\because \frac{CD}{CC_1} = 1$

$\therefore BC = CD = C_1C$

又  $\angle BCD = \angle C_1CB = \angle C_1CD$

由此可推得  $BD = C_1B = C_1D$

$\therefore$  三棱锥  $C-C_1BD$  是正三棱锥。.....10 分

设  $A_1C$  与  $C_1O$  相交于 G.

$\because A_1C_1 \parallel AC$ , 且  $A_1C_1 : OC = 2 : 1$

$\therefore C_1O : GO = 2 : 1$

又  $C_1O$  是正三角形  $C_1BD$  的 BD 边上的高和中线,

$\therefore$  点 G 是正三角形  $C_1BD$  的中心。

$\therefore CG \perp$  平面  $C_1BD$

即  $A_1C \perp$  平面  $C_1BD$  。.....12 分

证明二：由 (I) 知,  $BD \perp$  平面  $AC_1$

$\because A_1C \subset$  平面  $AC_1$ ,  $\therefore BD \perp A_1C$  。.....10 分

当  $\frac{CD}{CC_1} = 1$  时, 平行六面体的六个面是全等的菱形。

同  $BD \perp AC_1$  的证法可得  $BC_1 \perp A_1C$

又  $BD \perp BC_1 = B \therefore A_1C_1 \perp \text{平面} C_1BD$  .....12 分

(19) 本小题主要考查不等式的解法、函数的单调性等基本知识，分数讨论的数学思想方法和运算、推理能力。满分 12 分。

解：(I) 不等式  $f(x) \leq 1$  即  $\sqrt{x^2 + 1} \leq 1 + ax$ ，由此得  $1 \leq 1 + ax$ ，即  $ax \geq 0$ ，其中常数  $a > 0$

所以，原不等式等价于

$$\begin{cases} x^2 + 1 \leq (1 + ax)^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ (a^2 - 1)x + 2a \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

所以，当  $0 < a < 1$  时，所给不等式的解集为  $\{x | 0 \leq x \leq \frac{2a}{1 - a^2}\}$ ；

当  $a \geq 1$  时，所给不等式的解集为  $\{x | x \geq 0\}$  .....6 分

(II) 在区间  $[0, +\infty]$  上任取  $x_1, x_2$ ，使得  $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1} - a(x_1 - x_2) \\ &= \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2) \left( \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a \right) \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

(i) 当  $a \geq 1$  时

$$\because \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} < 1$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a < 0$$

$$\text{又 } x_1 - x_2 < 0$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$$

即  $f(x_1) > f(x_2)$

所以, 当  $a \geq 1$  时, 函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty]$  上是单调递减函数。……………10 分

(ii) 当  $0 < a < 1$  时, 在区间  $[0, +\infty]$  上存在两点  $x_1 = 0, x_2 = \frac{2a}{1-a^2}$ , 满足  $f(x_1) = 1, f(x_2) = 1$ ,

即  $f(x_1) = f(x_2)$ , 所以函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty]$  上不是单调函数。

综上, 当且仅当  $a \geq 1$  时, 函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty]$  上是单调函数。……………12 分

(20) 本小题主要考查等比数列的概念和基本性质, 推理和运算能力, 满分 12 分。

解: (I) 因为  $\{c_{n+1} - pc_n\}$  是等比数列, 故有  $(c_{n+1} - pc_n)^2 = (c_{n+2} - pc_{n+1})(c_n - pc_{n-1})$

将  $c_n = 2^n + 3^n$  代入上式, 得

$$\begin{aligned} & [2^{n+1} + 3^{n+1} - p(2^n + 3^n)]^2 \\ &= [2^{n+2} + 3^{n+2} - p(2^{n+1} + 3^{n+1})] \cdot [2^n + 3^n - p(2^{n-1} + 3^{n-1})] \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(2-p)2^n + (3-p)3^n]^2 \\ \text{即} &= [(2-p)2^{n+1} + (3-p)3^{n+1}][2^n + 3^n - p(2^{n-1} + 3^{n-1})] \end{aligned}$$

$$\text{整理得 } \frac{1}{6}(2-p)(3-p) \cdot 2^n \cdot 3^n = 0$$

解得  $p=2$  或  $p=3$ 。……………6 分

(II) 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  的公比分别是  $p, q, p \neq q, c_n = a_n + b_n$

为证  $\{c_n\}$  不是等比数列只需证  $c_2^2 \neq c_1 \cdot c_3$ 。

$$\text{事实上, } c_2^2 = (a_1p + b_1q)^2 = a_1^2p^2 + b_1^2q^2 + 2a_1b_1pq,$$

$$c_1 \cdot c_3 = (a_1 + b_1)(a_1p^2 + b_1q^2) = a_1^2p^2 + b_1^2q^2 + a_1b_1(p^2 + q^2)$$

由于  $p \neq q, p^2 + q^2 > 2pq$ , 又  $a_1, b_1$  不为零,

因此  $c_2^2 \neq c_1 \cdot c_3$ , 故  $\{c_n\}$  不是等比数列。.....12 分

(21) 本小题主要考查由函数图象建立函数关系式和求函数最大值的问题, 考查运用所学知识解决实际问题的能力, 满分 12 分。

解: (I) 由图一可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t) = \begin{cases} 300 - t, & 0 \leq t \leq 200 \\ 2t - 300, & 200 < t \leq 300 \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由图二可得种植成本与时间的函数关系为

$$g(t) = \frac{1}{200}(t-150)^2 + 100, \quad 0 \leq t \leq 300 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 设  $t$  时刻的纯收益为  $h(t)$ , 则由题意得

$$h(t) = f(t) - g(t)$$

$$\text{即 } h(t) = \begin{cases} -\frac{1}{200}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{175}{2}, & 0 \leq t \leq 200 \\ -\frac{1}{200}t^2 + \frac{2}{7}t - \frac{1025}{2}, & 200 < t \leq 300 \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

当  $0 \leq t \leq 200$  时, 配方整理得

$$h(t) = -\frac{1}{200}(t-50)^2 + 100$$

所以, 当  $t=50$  时,  $h(t)$  取得区间  $[0, 200]$  上的最大值 100;

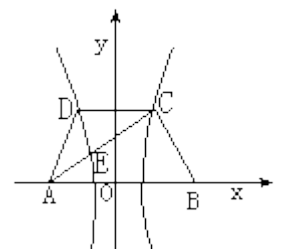
当  $200 < t \leq 300$  时, 配方整理得

$$h(t) = -\frac{1}{200}(t-350)^2 + 100$$

所以, 当  $t=300$  时,  $h(t)$  取得区间  $[200, 300]$  上的最大值 87.5。.....10 分

综上, 由  $100 > 87.5$  可知,  $h(t)$  在区间  $[0, 300]$  上可以取得最大值 100, 此时  $t=50$ , 即从二月一日开始的第 50 天时, 上市的西红柿纯收益最大。.....12 分

(22) 本小题主要考查坐标法、定比分点坐标公式、双曲线的概念和性质, 推理、运算能力和综合应用数学知识解决问题的能力, 满分 14 分。



解如图，以 AB 的垂直平分线为 y 轴，直线 AB 为 x 轴，建立直角坐标系 xOy，则 CD ⊥ y 轴。因为双曲线经过点 C、D，且以 A、B 为焦点，由双曲线的对称性知 C、D 关于 x 轴对称。……………2 分

依题意，记 A(-c, 0)， $C(\frac{c}{2}, h)$ ， $E(x_0, y_0)$ ，其中  $c = \frac{1}{2}|AB|$  为双曲线的半焦距，h 是梯形的高。由定比分点坐标公式得

$$x_0 = \frac{-c + \frac{c}{2}\lambda}{1 + \lambda} = \frac{(\lambda - 2)c}{2(\lambda + 1)}$$

$$y_0 = \frac{\lambda h}{1 + \lambda}。$$

设双曲线的方程为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，则离心率  $e = \frac{c}{a}$ 。

由点 C、E 在双曲线上，将点 C、E 的坐标和  $e = \frac{c}{a}$  代入双曲线方程得

$$\frac{e^2}{4} - \frac{h^2}{b^2} = 1 \tag{①}$$

$$\frac{e^2}{4} \left(\frac{\lambda - 2}{\lambda + 1}\right)^2 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)^2 \frac{h^2}{b^2} = 1 \tag{②} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

由①式得  $\frac{h^2}{b^2} = \frac{e^2}{4} - 1$  ③

将③式代入②式，整理得

$$\frac{e^2}{4} (4 - 4\lambda) = 1 + 2\lambda$$

故  $\lambda = 1 - \frac{3}{e^2 + 2}$ 。……………10 分

由题设  $\frac{2}{3} \leq \lambda \leq \frac{3}{4}$  得， $\frac{2}{3} \leq 1 - \frac{3}{e^2 + 2} \leq \frac{3}{4}$

解得  $\sqrt{7} \leq e \leq \sqrt{10}$

所以双曲线的离心率的取值范围为  $[\sqrt{7}, \sqrt{10}]$ 。.....14 分