2015年普通高等学校招生全国统一考试（福建卷）

数　学（理工类）

第Ⅰ卷（选择题共50分）

一、选择题：本题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．若集合 $A=\{i,i^2,i^3,i^4\}$ （i 是虚数单位），$B=\{1,-1\}$ ，则 $A\cap B$ 等于（　　）

A．$\{-1\}$　B．$\{1\}$　C．$\{1,-1\}$　D．ϕ

【答案】C

【解析】学科网

由已知得 $A=\{i,-1,-i,1\}$，故 $A\cap B=\{1,-1\}$，故选C.

【考点定位】1、复数的概念；2、集合的运算.

【名师点睛】本题考查复数的概念和集合的运算，利用 $i^2=-1$ 和交集的定义求解，属于基础题，要注意运算准确度.

2．下列函数为奇函数的是(　　)

A．$y=\sqrt{x}$　B．$y=|\sin x|$　C．$y=\cos x$　D．$y=e^x-e^{-x}$

【答案】D

【解析】函数 $y=\sqrt{x}$ 是非奇非偶函数；$y=|\sin x|$ 和 $y=\cos x$ 是偶函数；$y=e^x-e^{-x}$ 是奇函数，故选D.

【考点定位】函数的奇偶性.

【名师点睛】本题考查函数的奇偶性，除了要掌握奇偶性定义外，还要深刻理解其定义域特征即定义域关于原点对称，否则即使满足定义，但是不具有奇偶性，属于基础题.

3．若双曲线 $E:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在双曲线 E 上，且 $|PF_1|=3$，则 $|PF_2|$ 等于（　）

A．11　　B．9　　C．5　　D．3

【答案】B

【解析】由双曲线定义得 $||PF_1|-|PF_2||=2a=6$，即 $|3-|PF_2||=6$，解得 $|PF_2|=9$，故选B.

【考点定位】双曲线的标准方程和定义.

【名师点睛】本题考查了双曲线的定义和标准方程，利用双曲线的定义列方程求解，属于基础题，注意运算的准确性.

4．为了解某社区居民的家庭年收入所年支出的关系，随机调查了该社区 5 户家庭，得到如下统计数据表：

收入 x （万元）	8.2	8.6	10.0	11.3	11.9
支出 y （万元）	6.2	7.5	8.0	8.5	9.8

根据上表可得回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ ，其中 $\hat{b}=0.76,\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$ ，据此估计，该社区一户收入为 15 万元家庭年支出为(　　)

A．11.4 万元　B．11.8 万元　C．12.0 万元　D．12.2 万元

【答案】B

【解析】由已知得 $\overline{x}=\dfrac{8.2+8.6+10.0+11.3+11.9}{5}=10$（万元），$\overline{y}=\dfrac{6.2+7.5+8.0+8.5+9.8}{5}=8$（万元），故 $\hat{a}=8-0.76\times10=0.4$，所以回归直线方程为 $\hat{y}=0.76x+0.4$，当社区一户收入为 15 万元家庭年支出为 $\hat{y}=0.76\times15+0.4=11.8$（万元），故选 B．学科网

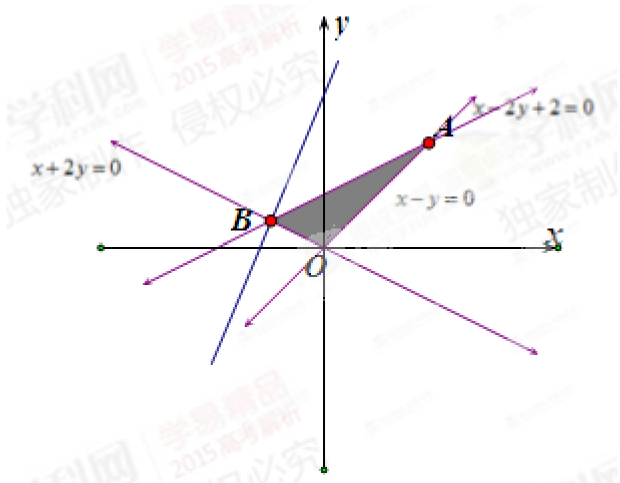
【考点定位】线性回归方程.

【名师点睛】本题考查线性回归方程，要正确利用平均数公式计算和理解线性回归方程的意义，属于基础题，要注意计算的准确性.

5．若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\ge 0,\\ x-y\le 0,\\ x-2y+2\ge 0,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最小值等于（　　）

A．$-\dfrac{5}{2}$　B．-2　C．$-\dfrac{3}{2}$　D．2

【答案】A

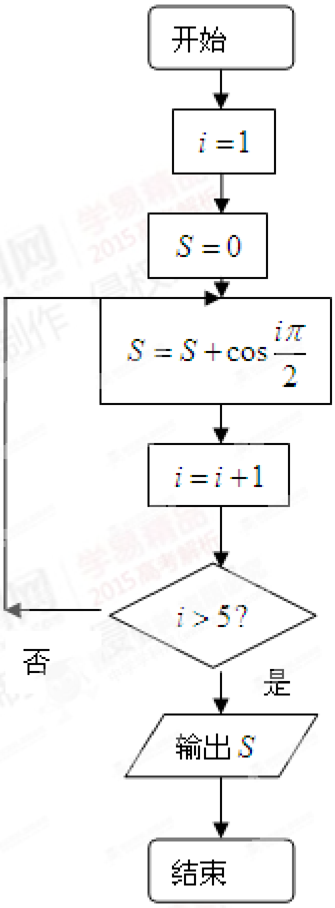


【解析】画出可行域，如图所示，目标函数变形为 $y=2x-z$，当 z 最小时，直线 $y=2x-z$ 的纵截距最大，故将直线 $y=2x$ 经过可行域，尽可能向上移到过点 $B(-1,\frac{1}{2})$ 时，z 取到最小值，最小值为 $z=2\times(-1)-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$，故选 A.

【考点定位】线性规划.

【名师点睛】本题考查线性规划，要正确作图，首先要对目标函数进行分析，什么时候目标函数取到最大值，解该类题目时候，往往还要将目标直线的斜率和可行域边界的斜率比较，否则很容易出错，属于基础题..

6．阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，则输出的结果为(　　)



A．2　　B． 1　　C．0　　D． -1

【答案】C

【解析】程序在执行过程中 S,i 的值依次为：$S=0,i=1$；$S=0,i=2$；$S=-1,i=3$；$S=-1,i=4$；$S=0,i=5$；$S=0,i=6$，程序结束，输出 $S=0$，故选 C．学科网

【考点定位】程序框图．

【名师点睛】本题考查程序框图，关键在于读懂框图有什么功能，要注意依序进行，认真判断条件来决定程序的执行方向．理解每个变量和框图的关系．运算量不大，重在理解，重在细心，属于基础题．

7．若 l,m 是两条不同的直线，m 垂直于平面 α，则“$l\perp m$”是“$l//\alpha$”的（　　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件　C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】若 $l\perp m$，因为 m 垂直于平面 α，则 $l//\alpha$ 或 $l\subset\alpha$；若 $l//\alpha$，又 m 垂直于平面 α，则 $l\perp m$，所以“$l\perp m$”是“$l//\alpha$”的必要不充分条件，故选 B．

【考点定位】空间直线和平面、直线和直线的位置关系．

【名师点睛】本题以充分条件和必要条件为载体考查空间直线、平面的位置关系，要理解线线垂直和线面垂直的相互转化以及线线平行和线面平行的转化还有平行和垂直之间的内部联系，长方体是直观认识和描述空间点、线、面位置关系很好的载体，所以我们可以将这些问题还原到长方体中研究.

8．若 a,b 是函数 $f\left(x\right)=x^2-px+q\left(p>0,q>0\right)$ 的两个不同的零点，且 $a,b,-2$ 这三个数可适当排序后成等差数列，也可适当排序后成等比数列，则 $p+q$ 的值等于（　　）

A．6　B．7　C．8　D．9

【答案】D

【解析】由韦达定理得 $a+b=p$，$a\cdot b=q$，则 $a>0,b>0$，当 $a,b,-2$ 适当排序后成等比数列时，-2 必为等比中项，故 $a\cdot b=q=4$，$b=\dfrac{4}{a}$．当适当排序后成等差数列时，-2 必不是等差中项，当 a 是等差中项时，$2a=\dfrac{4}{a}-2$，解得 $a=1$，$b=4$；当 $\dfrac{4}{a}$ 是等差中项时，$\dfrac{8}{a}=a-2$，解得 $a=4$，$b=1$，综上所述，$a+b=p=5$，所以 $p+q=9$，选 D．学科网

【考点定位】等差中项和等比中项.

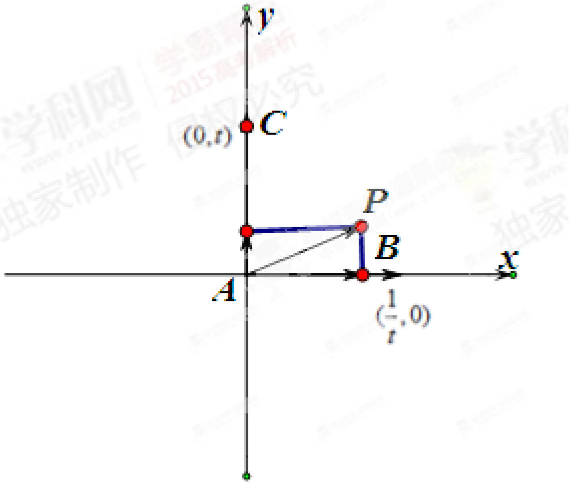
【名师点睛】本题以零点为载体考查等比中项和等差中项，其中分类讨论和逻辑推理是解题核心．三个数成等差数列或等比数列，项与项之间是有顺序的，但是等差中项或等比中项是唯一的，故可以利用中项进行讨论，属于难题.

9．已知 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC},\left|\overrightarrow{AB}\right|=\dfrac{1}{t},\left|\overrightarrow{AC}\right|=t$ ，若 P 点是 ΔABC 所在平面内一点，且 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\dfrac{4\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ ，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值等于（　　）

A．13　B．15　C．19　D．21

【答案】A

【解析】以 A 为坐标原点，建立平面直角坐标系，如图所示，则 $B(\frac{1}{t},0)$，$C(0,t)$，$\overrightarrow{AP}=(1,\ 0)+4(0,1)=(1,4)$，即 $P(1,\ 4)$，所以 $\overrightarrow{PB}=(\frac{1}{t}-1,\ -4)$，$\overrightarrow{PC}=(-1,\ t-4)$，因此 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=1-\frac{1}{t}-4t+16=17-(\frac{1}{t}+4t)$，因为 $\frac{1}{t}+4t\ge2\sqrt{\frac{1}{t}\cdot4t}=4$，所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值等于13，当 $\frac{1}{t}=4t$，即 $t=\frac{1}{2}$ 时取等号.



【考点】1、平面向量数量积；2、基本不等式．

【名师点睛】本题考查平面向量线性运算和数量积运算，通过构建直角坐标系，使得向量运算完全代数化，实现了数形的紧密结合，同时将数量积的最大值问题转化为函数的最大值问题，本题容易出错的地方是对$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$的理解不到位，从而导致解题失败．

10．若定义在R上的函数$f\left(x\right)$满足$f\left(0\right)=-1$，其导函数$f'\left(x\right)$满足$f'\left(x\right)>k>1$，则下列结论中一定错误的是（　　）

A．$f\left(\dfrac{1}{k}\right)<\dfrac{1}{k}$　　B．$f\left(\dfrac{1}{k}\right)>\dfrac{1}{k-1}$　　C．$f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)<\dfrac{1}{k-1}$　　D．$f\left(\dfrac{1}{k-1}\right)>\dfrac{k}{k-1}$

【答案】C

【解析】由已知条件，构造函数$g(x)=f(x)-kx$，则$g'(x)=f'(x)-k>0$，故函数$g(x)$在R上单调递增，且$\dfrac{1}{k-1}>0$，故$g(\dfrac{1}{k-1})>g(0)$，所以$f(\dfrac{1}{k-1})-\dfrac{k}{k-1}>-1$，$f(\dfrac{1}{k-1})>\dfrac{1}{k-1}$，所以结论中一定错误的是C，选项D无法判断；构造函数$h(x)=f(x)-x$，则$h'(x)=f'(x)-1>0$，所以函数$h(x)$在R上单调递增，且$\dfrac{1}{k}>0$，所以$h(\dfrac{1}{k})>h(0)$，即$f(\dfrac{1}{k})-\dfrac{1}{k}>-1$，$f(\dfrac{1}{k})>\dfrac{1}{k}-1$，选项A,B无法判断，故选C．学科网

【考点定位】函数与导数．

【名师点睛】联系已知条件和结论，构造辅助函数是高中数学中一种常用的方法，解题中若遇到有关不等式、方程及最值之类问题，设法建立起目标函数，并确定变量的限制条件，通过研究函数的单调性、最值等问题，常可使问题变得明了，属于难题．

第 II 卷（非选择题共 100 分）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.把答案填在答题卡的相应位置.

11．$(x+2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数等于______________.（用数字作答）

【答案】80

【解析】$(x+2)^5$ 的展开式中 x^2 项为 $C_5^2 2^3 x^2=80$，所以 x^2 的系数等于 80.

【考点定位】二项式定理.

【名师点睛】本题考查二项式定理的特定项问题，往往是根据二项展开式的通项和所求项的联系解题，属于基础题，注意运算的准确度.

12．若锐角 ΔABC 的面积为 $10\sqrt{3}$，且 $AB=5, AC=8$，则 BC 等于________.

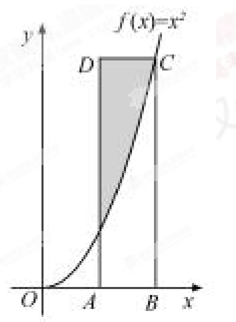
【答案】7

【解析】由已知得 ΔABC 的面积为 $\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=20\sin A=10\sqrt{3}$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A=49$，$BC=7$.

【考点定位】1、三角形面积公式；2、余弦定理.

【名师点睛】本题考查余弦定理，余弦定理是揭示三角形边角关系的重要定理，直接运用它可解决一类已知三角形两边及夹角求第三边或者是已知三个边求角的问题；知道两边和其中一边的对角，利用余弦定理可以快捷求第三边，属于基础题.

13．如图，点 A 的坐标为 $(1,0)$，点 C 的坐标为 $(2,4)$，函数 $f(x)=x^2$，若在矩形 $ABCD$ 内随机取一点，则此点取自阴影部分的概率等于____________.



【答案】$\frac{5}{12}$

【解析】由已知得阴影部分面积为$4-\int_1^2 x^2dx=4-\frac{7}{3}=\frac{5}{3}$．所以此点取自阴影部分的概率等于$\frac{\frac{5}{3}}{4}=\frac{5}{12}$．

【考点定位】几何概型．

【名师点睛】本题考查几何概型，当实验结果由等可能的无限多个结果组成时，利用古典概型求概率显然是不可能的，可以将所求概率转化为长度的比值（一个变量）、面积的比值（两个变量）、体积的比值（三个变量或根据实际意义）来求，属于中档题．

14．若函数$f(x)=\begin{cases}-x+6, x\le 2,\\ 3+\log_a x, x>2,\end{cases}$ （$a>0$ 且$a\ne 1$ ）的值域是$[4,+\infty)$ ，则实数a 的取值范围是______________．

【答案】$(1,2]$

【解析】当$x\le 2$，故$-x+6\ge 4$，要使得函数$f(x)$的值域为$[4,+\infty)$，只需$f_1(x)=3+\log_a x$（$x>2$）的值域包含于$[4,+\infty)$，故$a>1$，所以$f_1(x)>3+\log_a 2$，所以$3+\log_a 2\ge 4$，解得$1<a\le 2$，所以实数a的取值范围是$(1,2]$．学科网

【考点定位】分段函数求值域．

【名师点睛】本题考查分段函数的值域问题，分段函数是一个函数，其值域是各段函数值取值范围的并集，将分段函数的值域问题转化为集合之间的包含关系，是本题的一个亮点，要注意分类讨论思想的运用，属于中档题．

15．一个二元码是由 0 和 1 组成的数字串$x_1x_2\cdots x_n\left(n\in N^*\right)$ ，其中$x_k\left(k=1,2,\cdots,n\right)$ 称为第k 位码元，二元码是通信中常用的码，但在通信过程中有时会发生码元错误（即码元由 0 变为 1，或者由 1 变为 0）

已知某种二元码$x_1x_2\cdots x_7$ 的码元满足如下校验方程组：$\begin{cases}x_4\oplus x_5\oplus x_6\oplus x_7=0,\\ x_2\oplus x_3\oplus x_6\oplus x_7=0,\\ x_1\oplus x_3\oplus x_5\oplus x_7=0,\end{cases}$

其中运算$\oplus$ 定义为：$0\oplus 0=0,0\oplus 1=1,1\oplus 0=1,1\oplus 1=0$ ．

现已知一个这种二元码在通信过程中仅在第k 位发生码元错误后变成了 1101101，那么利用上述校验方程组可判定k 等于___________．

【答案】5．

【解析】由题意得相同数字经过运算后为0，不同数字运算后为1．由 $x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0$ 可判断后4个数字出错；由 $x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0$ 可判断后2个数字没错，即出错的是第4个或第5个；由 $x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0$ 可判断出错的是第5个，综上，第5位发生码元错误．学科网

【考点定位】推理证明和新定义．

【名师点睛】本题以二元码为背景考查新定义问题，解决时候要耐心读题，并分析新定义的特点，按照所给的数学规则和要求进行逻辑推理和计算等，从而达到解决问题的目的，．

三、解答题：本大题共6小题，共80分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16．某银行规定，一张银行卡若在一天内出现3次密码尝试错误，该银行卡将被锁定，小王到银行取钱时，发现自己忘记了银行卡的密码，但是可以确定该银行卡的正确密码是他常用的6个密码之一，小王决定从中不重复地随机选择1个进行尝试.若密码正确，则结束尝试；否则继续尝试，直至该银行卡被锁定.

(Ⅰ)求当天小王的该银行卡被锁定的概率；

(Ⅱ)设当天小王用该银行卡尝试密码次数为X，求X的分布列和数学期望.

【答案】(Ⅰ)$\frac{1}{2}$；(Ⅱ)分布列见解析，期望为$\frac{5}{2}$．

【解析】(Ⅰ)设"当天小王的该银行卡被锁定"的事件为A，

则 $P(A) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

(Ⅱ)依题意得，X所有可能的取值是1，2，3

又 $P(X=1) = \frac{1}{6}, P(X=2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6}, P(X=3) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times 1 = \frac{2}{3}$.

所以X的分布列为

X	1	2	3
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

所以 $E(X) = 1 ´ \frac{1}{6} + 2 ´ \frac{1}{6} + 3 ´ \frac{2}{3} = \frac{5}{2}$.

【考点定位】1、古典概型；2、离散型随机变量的分布列和期望．

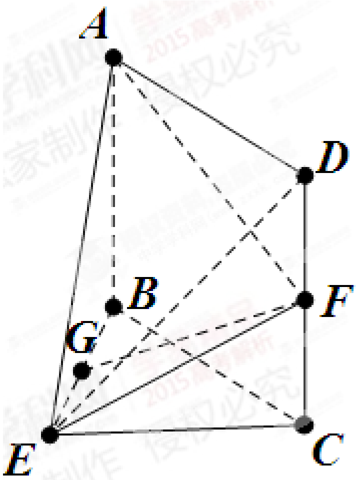
【名师点睛】本题考查古典概型和随机变量的期望，第一问，将事件转化为所选的三个密码都不是该银行卡密码，共有 A_5^3 种，而基本事件总数为 A_6^3，代入古典概型概率计算公式；第二问，写出离散型随机变量所有可能取值，并求取相应值的概率，写成分布列求期望即可．确定离散型取值时，要科学兼顾其实际意义，

做到不重不漏，计算出概率后要注意检验概率和是否为 1，以便及时矫正。

17．如图，在几何体 ABCDE 中，四边形 ABCD 是矩形，AB^ 平面 BEC，BE^ EC，AB=BE=EC=2，G，F 分别是线段 BE，DC 的中点.

（Ⅰ)求证：$GF//$平面ADE ；

（Ⅱ)求平面 AEF 与平面 BEC 所成锐二面角的余弦值.



【答案】（Ⅰ)详见解析；（Ⅱ) $\frac{2}{3}$.

【解析】学科网

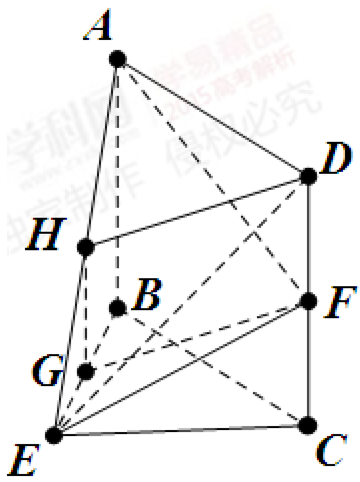
解法一：（Ⅰ）如图，取 AE 的中点 H，连接 HG， HD，又 G 是 BE 的中点，

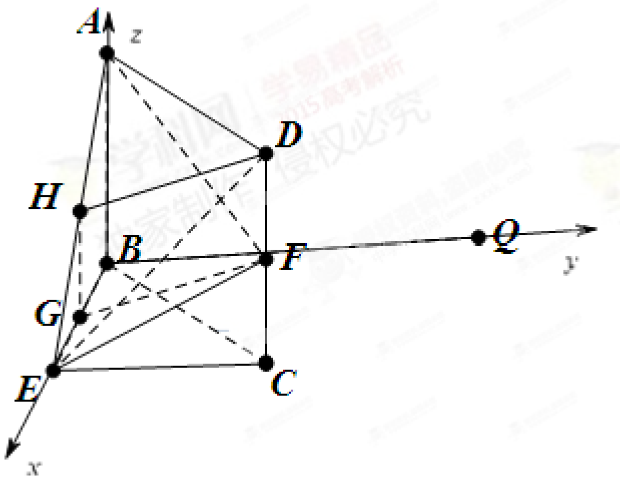
所以$GH \parallel AB$，且$GH=\frac{1}{2}AB$，

又 F 是 CD 中点，所以$DF=\frac{1}{2}CD$，由四边形 ABCD 是矩形得，$AB \parallel CD$，$AB=CD$，所以

$GH \parallel DF$，且$GH=DF$．从而四边形 $HGFD$ 是平行四边形，所以 $GF//DH$，,又

$DH \subset$平面ADE，$GF \not\subset$平面ADE，所以$GF \parallel$平面ADE．





(Ⅱ)如图，在平面 BEC 内，过点 B 作 $BQ \parallel EC$，因为 $BE \perp CE$，所以 $BQ \perp BE$．

又因为 $AB \perp$ 平面 BEC，所以 $AB \perp BE$，$AB \perp BQ$

以 B 为原点，分别以 $\overline{BE}, \overline{BQ}, \overline{BA}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，则 A(0,0,2)，B(0,0,0)，E(2,0,0)，F(2,2,1)．因为 $AB \perp$ 平面 BEC，所以 $\overline{BA}=(0,0,2)$ 为平面 BEC 的法向量，

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 AEF 的法向量.又 $\overline{AE}=(2,0,-2)$，$\overline{AF}=(2,2,-1)$

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overline{AE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overline{AF}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x-2z=0,\\ 2x+2y-z=0,\end{cases}$ 取 $z=2$ 得 $\vec{n}=(2,-1,2)$．

从而 $\cos\langle\vec{n},\overline{BA}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overline{BA}}{|\vec{n}|\cdot|\overline{BA}|}=\dfrac{4}{3\times 2}=\dfrac{2}{3}$，

所以平面 AEF 与平面 BEC 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{2}{3}$．

解法二：(Ⅰ)如图，取 AB 中点 M，连接 MG，MF，又 G 是 BE 的中点，可知 $GM // AE$，

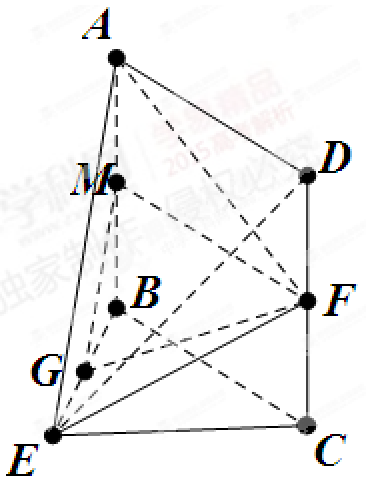
又 $AE \subset$ 面 ADE，$GM \not\subset$ 面 ADE，所以 $GM //$ 平面 ADE．

在矩形 ABCD 中，由M，F 分别是ＡＢ，ＣＤ的中点得 $MF // AD$．

又 $AD \subset$ 面 ADE，$MF \not\subset$ 面 ADE，所以 $MF //$ 面 ADE．

又因为 $GM \cap MF = M$，$GM \subset$ 面 GMF，$MF \subset$ 面 GMF，

所以面 $GMF //$ 平面 ADE，因为 $GF \subset$ 面 GMF，所以 $GM //$ 平面 ADE．学科网

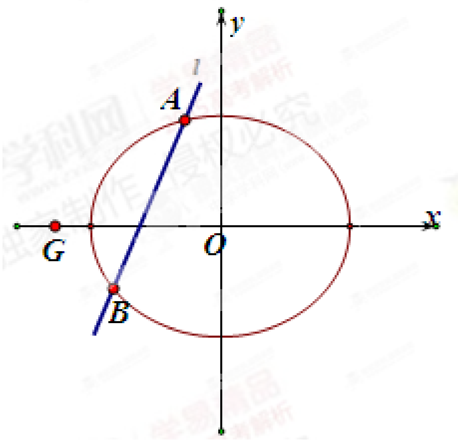


（Ⅱ）同解法一.

【考点定位】1、直线和平面平行的判断；2、面面平行的判断和性质；3、二面角.

【名师点睛】本题考查直线和平面平行的证明和二面角求法，直线和平面平行首先是利用其判定定理，或者利用面面平行的性质来证，注意线线平行、线面平行、面面平行的转化；利用坐标法求二面角，主要是空间直角坐标系的建立要恰当，便于用坐标表示相关点，求出半平面法向量夹角后，要观察二面角是锐角还是钝角，正确写出二面角的余弦值.

18.. 已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(0,\sqrt{2})$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



(Ⅰ)求椭圆 E 的方程；

(Ⅱ)设直线 $x=my-1$，$(m\in R)$ 交椭圆 E 于 A，B 两点，

判断点 $G(-\dfrac{9}{4},0)$ 与以线段 AB 为直径的圆的位置关系，并说明理由.

【答案】(Ⅰ) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$；(Ⅱ) $G(-\dfrac{9}{4},0)$ 在以 AB 为直径的圆外.

【解析】学科网

解法一：（Ⅰ）由已知得

$$\begin{cases} b=\sqrt{2}, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases} a=2 \\ b=\sqrt{2} \\ c=\sqrt{2} \end{cases}$$

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

（Ⅱ）设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，AB 中点为 $H(x_0,y_0)$.

由 $$\begin{cases} x=my-1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$$ 得 $(m^2+2)y^2-2my-3=0$,

所以 $y_1+y_2=\dfrac{2m}{m^2+2},y_1y_2=\dfrac{3}{m^2+2}$，从而 $y_0=\dfrac{2}{m^2+2}$.

所以 $|GH|^2=(x_0+\dfrac{9}{4})^2+y_0^2=(my_0+\dfrac{5}{4})^2+y_0^2=(m^2+1)y_0^2+\dfrac{5}{2}my_0+\dfrac{25}{16}$.

$$\frac{|AB|^2}{4}=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4}=\frac{(m^2+1)(y_1-y_2)^2}{4}$$

$$=\frac{(m^2+1)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}{4}=(m^2+1)(y_0^2-y_1y_2),$$

故 $|GH|^2-\dfrac{|AB|^2}{4}=\dfrac{5}{2}my_0+(m^2+1)y_1y_2+\dfrac{25}{16}=\dfrac{5m^2}{2(m^2+2)}-\dfrac{3(m^2+1)}{m^2+2}+\dfrac{25}{16}=\dfrac{17m^2+2}{16(m^2+2)}>0$

所以 $|GH|>\dfrac{|AB|}{2}$，故 $G(-\dfrac{9}{4},0)$ 在以 AB 为直径的圆外.

解法二：(Ⅰ)同解法一.

(Ⅱ)设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{GA}=(x_1+\frac{9}{4},y_1),\overrightarrow{GB}=(x_2+\frac{9}{4},y_2)$.

由 $\begin{cases} x=my-1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2-2my-3=0$，所以 $y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2},y_1y_2=\frac{3}{m^2+2}$，

从而 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=(x_1+\frac{9}{4})(x_2+\frac{9}{4})+y_1y_2=(my_1+\frac{5}{4})(my_2+\frac{5}{4})+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2+\frac{5}{4}m(y_1+y_2)+\frac{25}{16}=\frac{5m^2}{2(m^2+2)}-\frac{3(m^2+1)}{m^2+2}+\frac{25}{16}=\frac{17m^2+2}{16(m^2+2)}>0$

所以 $\cos\langle\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\rangle>0$，又 $\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}$ 不共线，所以 $\angle AGB$ 为锐角.

故点 $G(-\frac{9}{4},0)$ 在以 AB 为直径的圆外．学科网

【考点定位】1、椭圆的标准方程；2、直线和椭圆的位置关系；3、点和圆的位置关系.

【名师点睛】本题通过判断点和圆的位置关系来考查中点问题，利用韦达定理确定圆心，然后计算圆心到点 G 的距离并和半径比较得解；也可以构造向量，通过判断数量积的正负来确定点和圆的位置关系：$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}<0\Leftrightarrow$ 点 G 在圆内；$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}>0\Leftrightarrow$ 点 G 在圆外；$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=0\Leftrightarrow$ 点 G 在圆上，本题综合性较高，较好地考查分析问题解决问题的能力.

19．已知函数 $f(x)$ 的图像是由函数 $g(x)=\cos x$ 的图像经如下变换得到：先将 $g(x)$ 图像上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍（横坐标不变），再将所得到的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度.

(Ⅰ)求函数 $f(x)$ 的解析式，并求其图像的对称轴方程；

(Ⅱ)已知关于 x 的方程 $f(x)+g(x)=m$ 在 $[0,2\pi)$ 内有两个不同的解 α,β.

(1)求实数 m 的取值范围；

(2)证明：$\cos(\alpha-\beta)=\frac{2m^2}{5}-1$.

【答案】(Ⅰ) $f(x)=2\sin x$，$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$.；(Ⅱ)（1）$(-\sqrt{5},\sqrt{5})$；（2）详见解析.

【解析】解法一：(1)将 $g(x)=\cos x$ 的图像上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍（横坐标不变）得到

$y=2\cos x$ 的图像，再将 $y=2\cos x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后得到 $y=2\cos(x-\frac{\pi}{2})$ 的图像，故

$f(x)=2\sin x$，从而函数 $f(x)=2\sin x$ 图像的对称轴方程为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$.

(2)1) $f(x)+g(x)=2\sin x+\cos x=\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{5}}\cos x)$

$=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$（其中 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$）

依题意，$\sin(x+\varphi)=\frac{m}{\sqrt{5}}$ 在区间 $[0,2\pi)$ 内有两个不同的解 α,β 当且仅当 $|\frac{m}{\sqrt{5}}|<1$，故 m 的取值范围是

$(-\sqrt{5},\sqrt{5})$.

2)因为 α,β 是方程 $\sqrt{5}\sin(x+\varphi)=m$ 在区间 $[0,2\pi)$ 内有两个不同的解，

所以 $\sin(\alpha+\varphi)=\frac{m}{\sqrt{5}}$，$\sin(\beta+\varphi)=\frac{m}{\sqrt{5}}$.

当 $1\le m<\sqrt{5}$ 时，$\alpha+\beta=2(\frac{\pi}{2}-\varphi),\alpha-\beta=\pi-2(\beta+\varphi)$;

当 $-\sqrt{5}<m<1$ 时，$\alpha+\beta=2(\frac{3\pi}{2}-\varphi),\alpha-\beta=3\pi-2(\beta+\varphi)$;

所以 $\cos(\alpha-\beta)=-\cos 2(\beta+\varphi)=2\sin^2(\beta+\varphi)-1=2(\frac{m}{\sqrt{5}})^2-1=\frac{2m^2}{5}-1$.

解法二：(1)同解法一.

(2)1) 同解法一.

2) 因为 α,β 是方程 $\sqrt{5}\sin(x+\varphi)=m$ 在区间 $[0,2\pi)$ 内有两个不同的解，

所以 $\sin(\alpha+\varphi)=\frac{m}{\sqrt{5}}$，$\sin(\beta+\varphi)=\frac{m}{\sqrt{5}}$.

当 $1\le m<\sqrt{5}$ 时，$\alpha+\beta=2(\frac{\pi}{2}-\varphi)$,即 $\alpha+\varphi=\pi-(\beta+\varphi)$;

当 $-\sqrt{5}<m<1$ 时，$\alpha+\beta=2(\frac{3\pi}{2}-\varphi)$,即 $\alpha+\varphi=3\pi-(\beta+\varphi)$;

所以 $\cos(\alpha+\varphi)=-\cos(\beta+\varphi)$

于是 $\cos(\alpha-\beta)=\cos[(\alpha+\varphi)-(\beta+\varphi)]=\cos(\alpha+\varphi)\cos(\beta+\varphi)+\sin(\alpha+\varphi)\sin(\beta+\varphi)$

$$=-\cos^2(\beta+\varphi)+\sin(\alpha+\varphi)\sin(\beta+\varphi)=-[1-(\frac{m}{\sqrt{5}})^2]+(\frac{m}{\sqrt{5}})^2=\frac{2m^2}{5}-1.$$

【考点定位】1、三角函数图像变换和性质；2、辅助角公式和诱导公式.

【名师点睛】本题通过判断点和圆的位置关系来考查中点问题，利用韦达定理确定圆心，然后计算圆心到点 G 的距离并和半径比较得解；也可以构造向量，通过判断数量积的正负来确定点和圆的位置关系：$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}<0\Leftrightarrow$ 点 G 在圆内；$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}>0\Leftrightarrow$ 点 G 在圆外；$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=0\Leftrightarrow$ 点 G 在圆上，本题综合性较高，较好地考查分析问题解决问题的能力.

20．已知函数 $f(x)=\ln(1+x)$，$g(x)=kx,(k$ Î $R),$

(Ⅰ)证明：当 $x>0$时，$f(x)<x$；

(Ⅱ)证明：当 $k<1$ 时，存在 $x_0>0$,使得对 任意xÎ $(0,\ x_0)$,恒有 $f(x)>g(x)$;

(Ⅲ)确定 k 的所以可能取值，使得存在 $t>0$，对任意的 xÎ $(0,\ t)$,恒有 $|f(x)-g(x)|<x^2$.

【答案】(Ⅰ)详见解析；(Ⅱ)详见解析；(Ⅲ) $k=1$.

【解析】解法一：(1)令 $F(x)=f(x)-x=\ln(1+x)-x,x\in(0,+\infty)$,则有 $F'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}$

当 $x\in(0,+\infty)$，$F'(x)<0$,所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

故当 $x>0$ 时，$F(x)<F(0)=0$,即当 $x>0$ 时，$f(x)<x$.

(2)令 $G(x)=f(x)-g(x)=\ln(1+x)-kx, x\in(0,+\infty)$, 则有 $G'(x)=\dfrac{1}{1+x}-k=\dfrac{-kx+(1-k)}{1+x}$

当 $k\le 0$ $G'(x)>0$, 所以 $G(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增, $G(x)>G(0)=0$

故对任意正实数 x_0 均满足题意.

当 $0<k<1$ 时，令 $G'(x)=0$, 得 $x=\dfrac{1-k}{k}=\dfrac{1}{k}-1>0$.

取 $x_0=\dfrac{1}{k}-1$, 对任意 $x\in(0,x_0)$, 恒有 $G'(x)>0$, 所以 $G(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递增, $G(x)>G(0)=0$, 即 $f(x)>g(x)$.

综上，当 $k<1$ 时，总存在 $x_0>0$, 使得对任意的 $x\in(0,\ x_0)$, 恒有 $f(x)>g(x)$.

(3)当 $k>1$ 时，由（1）知，对于 $\forall x\in(0,+\infty)$, $g(x)>x>f(x)$, 故 $g(x)>f(x)$,

$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)=kx-\ln(1+x)$,

令 $M(x)=kx-\ln(1+x)-x^2, x\in[0,\ +\infty)$，则有 $M'(x)=k-\dfrac{1}{1+x}-2x=\dfrac{-2x^2+(k-2)x+k-1}{1+x}$,

故当 $x\in\left(0,\dfrac{k-2+\sqrt{(k-2)^2+8(k-1)}}{4}\right)$ 时，$M'(x)>0$, $M(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{k-2+\sqrt{(k-2)^2+8(k-1)}}{4}\right)$ 上单调递增,

故 $M(x)>M(0)=0$, 即 $|f(x)-g(x)|>x^2$, 所以满足题意的 t 不存在.

当 $k<1$ 时，由（2）知存在 $x_0>0$, 使得对任意的任意的 $x\in(0,\ x_0)$, 恒有 $f(x)>g(x)$.

此时 $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)=\ln(1+x)-kx$,

令 $N(x)=\ln(1+x)-kx-x^2, x\in[0,\ +\infty)$，则有 $N'(x)=\dfrac{1}{1+x}-k-2x=\dfrac{-2x^2-(k+2)x-k+1}{1+x}$,

故当 $x\in\left(0,\dfrac{-(k+2)+\sqrt{(k+2)^2+8(1-k)}}{4}\right)$ 时，$N'(x)>0$, $M(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{-(k+2)+\sqrt{(k+2)^2+8(1-k)}}{4}\right)$ 上单调递增，故 $N(x)>N(0)=0$, 即 $f(x)-g(x)>x^2$, 记 x_0 与 $\dfrac{-(k+2)+\sqrt{(k+2)^2+8(1-k)}}{4}$ 中较小的为 x_1,

则当 $x\in(0,\ x_1)$ 时，恒有 $|f(x)-g(x)|>x^2$，故满足题意的 t 不存在.

当k=1，由（1）知，当$x\in(0,+\infty)$，$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)=x-\ln(1+x)$，

令$H(x)=x-\ln(1+x)-x^2, x\in[0,\ +\infty)$，则有$H'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}-2x=\dfrac{-2x^2-x}{1+x}$，

当$x>0$时，$H'(x)<0$，所以$H(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，故$H(x)<H(0)=0$，

故当$x>0$时，恒有$|f(x)-g(x)|<x^2$，此时，任意实数t满足题意.

综上，k=1.

解法二：（1）（2）同解法一.

（3）当$k>1$时，由（1）知，对于$\forall x\in(0,+\infty)$，$g(x)>x>f(x)$，，

故$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)=kx-\ln(1+x)>kx-x=(k-1)x$，

令$(k-1)x>x^2$，解得$0<x<k-1$，

从而得到当$k>1$时，对于$x\in(0,k-1)$恒有$|f(x)-g(x)|>x^2$，所以满足题意的t不存在.

当$k<1$时，取$k_1=\dfrac{k+1}{2}$，从而$k<k_1<1$

由（2）知存在$x_0>0$，使得任意$x\in(0,\ x_0)$，恒有$f(x)>k_1x>kx=g(x)$.

此时$|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)>(k_1-k)x=\dfrac{1-k}{2}x$，

令$\dfrac{1-k}{2}x>x^2$，解得$0<x<\dfrac{1-k}{2}$，此时 $f(x)-g(x)>x^2$，

记x_0与$\dfrac{1-k}{2}$中较小的为x_1，则当$x\in(0,\ x_1)$时，恒有$|f(x)-g(x)|>x^2$，

故满足题意的t不存在.

当k=1，由（1）知，当$x\in(0,+\infty)$，$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)=x-\ln(1+x)$，

令$M(x)=x-\ln(1+x)-x^2, x\in[0,\ +\infty)$，则有$M'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}-2x=\dfrac{-2x^2-x}{1+x}$，

当$x>0$时，$M'(x)<0$，所以$M(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，故$M(x)<M(0)=0$，

故当$x>0$时，恒有$|f(x)-g(x)|<x^2$，此时，任意实数t满足题意.

综上，k=1.

【考点定位】导数的综合应用.

【名师点睛】在解函数的综合应用问题时,我们常常借助导数,将题中千变万化的隐藏信息进行转化，探究这类问题的根本，从本质入手,进而求解，利用导数研究函数的单调性，再用单调性来证明不等式是函数、导数、不等式综合中的一个难点，解题技巧是构造辅助函数，把不等式的证明转化为利用导数研究函数的单调性或最值，从而证得不等式，注意 $f(x)>g(x)$ 与 $f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$ 不等价，$f(x)_{\min}>g(x)_{\max}$ 只是 $f(x)>g(x)$ 的特例，但是也可以利用它来证明，在2014年全国Ⅰ卷理科高考21题中，就是使用该种方法证明不等式；导数的强大功能就是通过研究函数极值、最值、单调区间来判断函数大致图象，这是利用研究基本初等函数方法所不具备的，而是其延续.

21．本题设有三个选考题，请考生任选2题作答.

选修4-2：矩阵与变换

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ)求A的逆矩阵 A^{-1}；

(Ⅱ)求矩阵C，使得AC=B.

【答案】(Ⅰ)$\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -2 & 1\end{pmatrix}$；（Ⅱ）$\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix}$.

【解析】(1)因为 $|A|=2\times3-1\times4=2$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{-4}{2} & \frac{2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

(2)由AC=B得 $(A^{-1}A)C=A^{-1}B$,

故 $C=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix}$

【考点定位】矩阵和逆矩阵.

【名师点睛】本题考查逆矩阵和逆矩阵的性质，是通过伴随矩阵和矩阵的乘法求解，属于基础题，注意运算的准确性.

选修4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系xoy中，圆C的参数方程为$\begin{cases} x=1+3\cos t \\ y=-2+3\sin t \end{cases}$(t为参数).在极坐标系（与平面直角坐标系$xoy$取相同的长度单位，且以原点O为极点，以$x$轴非负半轴为极轴）中，直线l的方程为

$\sqrt{2}\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\mathrm{m},(\mathrm{m}\in \mathrm{R})$.

(Ⅰ)求圆C的普通方程及直线l的直角坐标方程;

(Ⅱ)设圆心C到直线l的距离等于2，求m的值.

【答案】(Ⅰ) $(x-1)^2+(y+2)^2=9$， $x-y-m=0$；(Ⅱ) $m=-3\pm2\sqrt{2}$.

【解析】(Ⅰ)消去参数t，得到圆的普通方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=9$，

由$\sqrt{2}\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\mathrm{m}$，得$\rho\sin\theta-\rho\cos\theta-\mathrm{m}=0$，

所以直线l的直角坐标方程为$x-y-m=0$.

(Ⅱ)依题意，圆心C到直线l的距离等于2，即

$\frac{|1-(-2)+\mathrm{m}|}{\sqrt{2}}=2$,解得 $\mathrm{m}=-3\pm2\sqrt{2}$

【考点定位】1、参数方程和普通方程的互化；2、极坐标方程和直角坐标方程的互化；3、点到直线距离公式.

【名师点睛】本题考查圆的参数方程和普通方程的转化、直线极坐标方程和直角坐标方程的转化以及点到直线距离公式，消去参数方程中的参数，就可把参数方程化为普通方程，消去参数的常用方法有：①代入消元法；②加减消元法；③乘除消元法；④三角恒等式消元法，极坐标方程化为直角坐标方程，只要将$\rho\cos\theta$和$\rho\sin\theta$换成y和x即可

选修4-5：不等式选讲

已知$a>0,b>0,c>0$，函数$f(x)=|x+a|+|x-b|+c$的最小值为4.

(Ⅰ)求$a+b+c$的值;

(Ⅱ)求$\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2+c^2$的最小值.

【答案】(Ⅰ) 4；(Ⅱ)$\frac{8}{7}$.

【解析】(Ⅰ)因为 $f(x)=|x+a|+|x+b|+c\geq|(x+a)-(x+b)|+c=|a+b|+c$，当且仅当 $-a\leq x\leq b$ 时，等号成立，又 $a>0,b>0$，所以 $|a+b|=a+b$，所以 $f(x)$ 的最小值为 $a+b+c$，

所以 $a+b+c=4$．

(Ⅱ)由(1)知 $a+b+c=4$，由柯西不等式得

$$\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2+c^2\right)(4+9+1)\geq\left(\frac{a}{2}\times2+\frac{b}{3}\times3+c\times1\right)^2=(a+b+c)^2=16,$$

即 $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2+c^2\geq\frac{8}{7}$.

当且仅当 $\frac{\frac{1}{2}a}{2}=\frac{\frac{1}{3}b}{3}=\frac{c}{1}$，即 $a=\frac{8}{7},b=\frac{18}{7},c=\frac{2}{7}$ 时，等号成立

所以 $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2+c^2$ 的最小值为 $\frac{8}{7}$．

【考点定位】1、绝对值三角不等式；2、柯西不等式．

【名师点睛】当 x 的系数相等或相反时，可以利用绝对值不等式求解析式形如 $f(x)=|x+a|+|x+b|$ 的函数的最小值，以及解析式形如 $f(x)=|x+a|-|x+b|$ 的函数的最小值和最大值，否则去绝对号，利用分段函数的图象求最值．利用柯西不等式求最值时，要注意其公式的特征，以出现定值为目标．