绝密★启用前

2013年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

数学试卷(文史类)

（满分150分，考试时间120分钟）

考生注意

1.本场考试时间120分钟，试卷共4页，满分150分，答题纸共2页.

2.作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3.所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位.在试卷上作答一律不得分.

4.用2B铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1．不等式$\dfrac{x}{2x-1}<0$的解为____.

2．在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_2+a_3+a_4=30$，则$a_2+a_3=$____.

3．设$m\in\mathbf{R}$，$m^2+m-2+\left(m^2-1\right)\mathrm{i}$是纯虚数，其中i是虚数单位，则$m=$____.

4．若$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，则$y=$____.

5．已知ΔABC的内角A、B、C所对的边分别是a，b，c．若$a^2+ab+b^2-c^2=0$，则角C的大小是____.

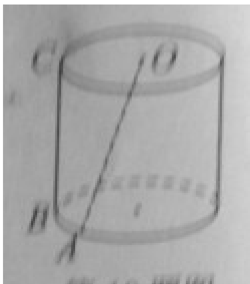
6．某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的40%．在一次考试中，男、女生平均分数分别为75、80，则这次考试该年级学生平均分数为____.

7．设常数$a\in\mathbf{R}$．若$\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$的二项展开式中$x^7$项的系数为-10，则$a=$____.

8．方程$\dfrac{9}{3^x-1}+1=3^x$的实数解为____.

9．若$\cos x\cos y+\sin x\sin y=\dfrac{1}{3}$，则$\cos\left(2x-2y\right)=$____.

10．已知圆柱Ω的母线长为l，底面半径为r，O是上地面圆心，A、B是下底面圆心上两个不同的点，BC是母线，如图．若直线OA与BC所成角的大小为$\dfrac{\pi}{6}$，则$\dfrac{1}{r}=$____.



第10题图

11．盒子中装有编号为1,2,3,4,5,6,7的七个球，从中任意取出两个，则这两个球的编号之积为偶数的概率是____（结果用最简分数表示）.

12．设AB是椭圆Γ的长轴，点C在Γ上，且$\angle CBA=\dfrac{\pi}{4}$．若$AB=4$，$BC=\sqrt{2}$，则$\Gamma$的两个焦点之间的距离为____.

13．设常数$a>0$，若$9x+\dfrac{a^2}{x}\geq a+1$对一切正实数$x$成立，则$a$的取值范围为____.

14．已知正方形$ABCD$的边长为1．记以A为起点，其余顶点为终点的向量分别为$\overrightarrow{a_1}$、

$\overrightarrow{a_2}$、$\overrightarrow{a_3}$；以C为起点，其余顶点为终点的向量分别为$\overrightarrow{c_1}$、$\overrightarrow{c_2}$、$\overrightarrow{c_3}$．若$i,j,k,l\in\{1,2,3\}$且$i\neq j,k\neq l$，则$\left(\overrightarrow{a_i}+\overrightarrow{a_j}\right)\cdot\left(\overrightarrow{c_k}+\overrightarrow{c_l}\right)$的最小值是____．

二、选择题（本大题共有4题，满分20分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分．

15．函数$f\left(x\right)=x^2-1\left(x\geq 1\right)$的反函数为$f^{-1}\left(x\right)$，则$f^{-1}\left(2\right)$的值是（　）

（A）$\sqrt{3}$　　（B）$-\sqrt{3}$　　（C）$1+\sqrt{2}$　　（D）$1-\sqrt{2}$

16．设常数$a\in\mathbf{R}$，集合$A=\left\{x\mid\left(x-1\right)\left(x-a\right)\geq 0\right\}$，$B=\left\{x\mid x\geq a-1\right\}$．若$A\cup B=\mathbf{R}$，则$a$的取值范围为（　）

（A）$\left(-\infty,2\right)$　　（B）$\left(-\infty,2\right]$　　（C）$\left(2,+\infty\right)$　　（D）$\left[2,+\infty\right)$

17．钱大姐常说“好货不便宜”，她这句话的意思是：“好货”是“不便宜”的（　）

（A）充分条件　　（B）必要条件

（C）充分必要条件　　（D）既非充分又非必要条件

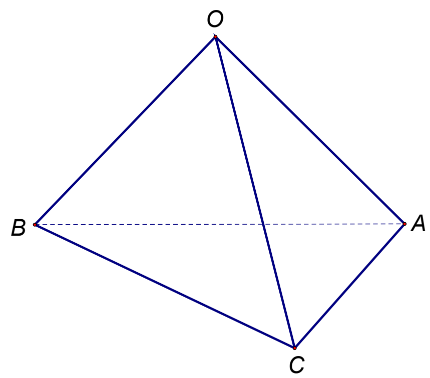
18．记椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{ny^2}{4n+1}=1$围成的区域（含边界）为$\Omega_n\left(n=1,2,\cdots\right)$，当点$\left(x,y\right)$分别在$\Omega_1,\Omega_2,\cdots$上时，$x+y$的最大值分别是$M_1,M_2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}M_n=$（　）

（A）0　（B）$\dfrac{1}{4}$　(C) 2　(D) $2\sqrt{2}$

三．解答题（本大题共有5题，满分74分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域写出必要的步骤．

19．（本题满分12分）

如图，正三棱锥$O-ABC$底面边长为2，高为1，求该三棱锥的体积及表面积．



第19题图

20．（本题满分14分）本题共有2个小题．第1小题满分5分，第2小题满分9分．

甲厂以x千米/小时的速度匀速生产某种产品（生产条件要求$1\leq x\leq 10$），每小时可获得的利润是$100(5x+1-\dfrac{3}{x})$元．

（1）求证：生产a千克该产品所获得的利润为$100a(5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2})$；

（2）要使生产900千克该产品获得的利润最大，问：甲厂应该如何选取何种生产速度？并求此最大利润．

21．（本题满分14分）本题共有2个小题．第1小题满分6分，第2小题满分8分．

已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x)$，其中常数 $\omega>0$．

（1）令 $\omega=1$，判断函数 $F(x)=f(x)+f(x+\frac{\pi}{2})$ 的奇偶性并说明理由；

（2）令 $\omega=2$，将函数 $y=f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再往上平移 1 个单位，得到函数 $y=g(x)$ 的图像．对任意的 $a\in R$，求 $y=g(x)$ 在区间 $[a,a+10\pi]$ 上零点个数的所有可能值．

22．（本题满分16分）本题共有3个小题．第1小题满分3分，第2小题满分5分，第3小题满分8分．

已知函数 $f(x)=2-|x|$．无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n), n\in N^*$．

（1）若 $a_1=0$，求 a_2，a_3，a_4；

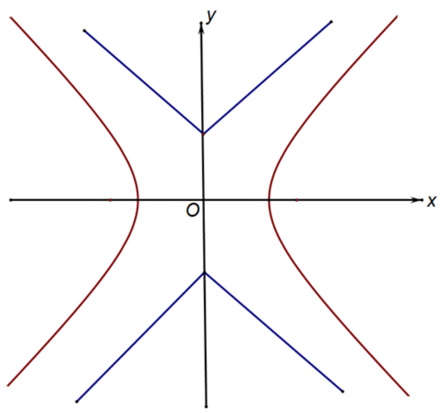
（2）若 $a_1>0$，且 a_1，a_2，a_3 成等比数列，求 a_1 的值；

（3）是否存在 a_1，使得 a_1，a_2，a_3，…，a_n …成等差数列？若存在，求出所有这样的 a_1；若不存在，说明理由．

23．（本题满分18分）本题共有3个小题．第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分．

如图，已知双曲线 C_1：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$，曲线 C_2：$|y|=|x|+1$．P 是平面内一点，若存在过点 P 的直线与 C_1、C_2 都有公共点，则称 P 为"C_1-C_2 型点"．

（1）在正确证明 C_1 的左焦点是"C_1-C_2 型点"时，要使用一条过该焦点的直线，试写出一条这样的直线的方程（不要求验证）；



第23题图

（2）设直线 $y=kx$ 与 C_2 有公共点，求证 $|k|>1$，进而证明原点不是“C_1-C_2 型点；

（3）求证：圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 内的点都不是“C_1-C_2 型点”.