

## 2015年江苏省高考数学试卷

### 一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，共计70分）

1. (5分) (2015•江苏) 已知集合 $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{2, 4, 5\}$ , 则集合 $A\cup B$ 中元素的个数为\_\_\_\_\_.

2. (5分) (2015•江苏) 已知一组数据4, 6, 5, 8, 7, 6, 那么这组数据的平均数为\_\_\_\_\_.

3. (5分) (2015•江苏) 设复数 $z$ 满足 $z^2=3+4i$  ( $i$ 是虚数单位), 则 $z$ 的模为\_\_\_\_\_.

4. (5分) (2015•江苏) 根据如图所示的伪代码, 可知输出的结果 $S$ 为\_\_\_\_\_.

```
S←1
I←1
While I<8
    S←S+2
    I←I+3
End While
Print S
```

5. (5分) (2015•江苏) 袋中有形状、大小都相同的4只球, 其中1只白球、1只红球、2只黄球, 从中一次随机摸出2只球, 则这2只球颜色不同的概率为\_\_\_\_\_.

6. (5分) (2015•江苏) 已知向量 $\vec{a}=(2, 1)$ ,  $\vec{b}=(1, -2)$ , 若 $m\vec{a}+n\vec{b}=(9, -8)$  ( $m, n\in\mathbb{R}$ ), 则 $m-n$ 的值为\_\_\_\_\_.

7. (5分) (2015•江苏) 不等式 $2^{x^2-x}<4$ 的解集为\_\_\_\_\_.

8. (5分) (2015•江苏) 已知 $\tan\alpha=-2$ ,  $\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{7}$ , 则 $\tan\beta$ 的值为\_\_\_\_\_.

9. (5分) (2015•江苏) 现有橡皮泥制作的底面半径为5, 高为4的圆锥和底面半径为2, 高为8的圆柱各一个, 若将它们重新制作成总体积与高均保持不变, 但底面半径相同的新的圆锥和圆柱各一个, 则新的底面半径为\_\_\_\_\_.

10. (5分) (2015•江苏) 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 以点 $(1, 0)$ 为圆心且与直线 $mx-y-2m-1=0$  ( $m\in\mathbb{R}$ ) 相切的所有圆中, 半径最大的圆的标准方程为\_\_\_\_\_.

11. (5分) (2015•江苏) 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=1$ , 且  $a_{n+1} - a_n = n+1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 则数列  $\{\frac{1}{a_n}\}$  的前10项的和为\_\_\_\_\_.

12. (5分) (2015•江苏) 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $P$  为双曲线  $x^2 - y^2 = 1$  右支上的一个动点, 若点  $P$  到直线  $x - y + 1 = 0$  的距离大于  $c$  恒成立, 则实数  $c$  的最大值为\_\_\_\_\_.

13. (5分) (2015•江苏) 已知函数  $f(x) = |\ln x|$ ,  $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1 \end{cases}$ , 则方程  $|f(x) + g(x)| = 1$  实根的个数为\_\_\_\_\_.

14. (5分) (2015•江苏) 设向量  $\vec{a}_k = (\cos \frac{k\pi}{6}, \sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6})$  ( $k=0, 1, 2, \dots, 12$ ), 则  $\sum_{k=0}^{11} (a_k \cdot a_{k+1})$  的值为\_\_\_\_\_.

**二、解答题 (本大题共6小题, 共计90分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

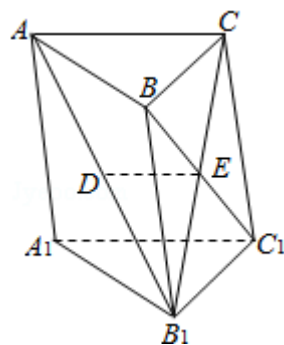
15. (14分) (2015•江苏) 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $AB=2$ ,  $AC=3$ ,  $A=60^\circ$ .

- (1) 求  $BC$  的长;
- (2) 求  $\sin 2C$  的值.

16. (14分) (2015•江苏) 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 已知  $AC \perp BC$ ,  $BC = CC_1$ , 设  $AB_1$  的中点为  $D$ ,  $B_1C \cap BC_1 = E$ .

求证:

- (1)  $DE \parallel$  平面  $AA_1C_1C$ ;
- (2)  $BC_1 \perp AB_1$ .



17. (14分) (2015•江苏) 某山区外围有两条相互垂直的直线型公路, 为进一步改善山区的交通现状, 计划修建一条连接两条公路和山区边界的直线型公路, 记两条相互垂直的公路为  $l_1, l_2$ , 山区边界曲线为  $C$ , 计划修建的公路为  $l$ , 如图所示,  $M, N$  为  $C$  的两个端点, 测得点  $M$  到  $l_1, l_2$  的距离分别为 5 千米和 40 千米, 点  $N$  到  $l_1, l_2$  的距离分别为 20 千米和 2.5 千米,

以 $l_2$ ,  $l_1$ 在的直线分别为 $x$ ,  $y$ 轴, 建立平面直角坐标系 $xOy$ , 假设曲线 $C$ 符合函数 $y = \frac{a}{x^2 + b}$  (

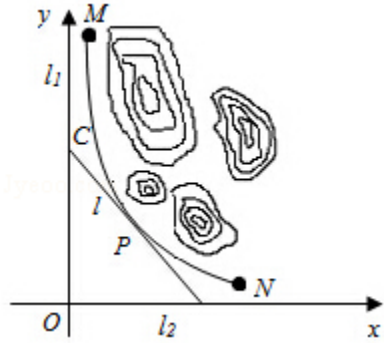
其中 $a$ ,  $b$ 为常数) 模型.

(1) 求 $a$ ,  $b$ 的值;

(2) 设公路 $l$ 与曲线 $C$ 相切于 $P$ 点,  $P$ 的横坐标为 $t$ .

①请写出公路 $l$ 长度的函数解析式 $f(t)$ , 并写出其定义域;

②当 $t$ 为何值时, 公路 $l$ 的长度最短? 求出最短长度.

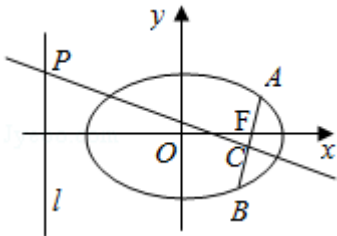


18. (16分) (2015•江苏) 如图, 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b >$

0) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且右焦点 $F$ 到左准线 $l$ 的距离为3.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过 $F$ 的直线与椭圆交于 $A$ ,  $B$ 两点, 线段 $AB$ 的垂直平分线分别交直线 $l$ 和 $AB$ 于点 $P$ ,  $C$ , 若 $PC = 2AB$ , 求直线 $AB$ 的方程.



19. (16分) (2015•江苏) 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

(1) 试讨论 $f(x)$  的单调性;

(2) 若 $b = c - a$  (实数 $c$ 是与 $a$ 无关的常数), 当函数 $f(x)$  有三个不同的零点时,  $a$ 的取值范围恰好是 $(-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ , 求 $c$ 的值.

20. (16分) (2015•江苏) 设 $a_1, a_2, a_3, a_4$ 是各项为正数且公差为 $d$  ( $d \neq 0$ ) 的等差数列.

(1) 证明:  $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}$  依次构成等比数列;

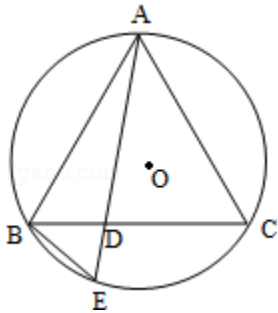
(2) 是否存在 $a_1, d$ , 使得 $a_1, a_2^2, a_3^3, a_4^4$  依次构成等比数列? 并说明理由;

(3) 是否存在  $a_1, d$  及正整数  $n, k$ , 使得  $a_1^n, a_2^{n+k}, a_3^{n+2k}, a_4^{n+3k}$  依次构成等比数列? 并说明理由。

三、附加题(本大题包括选做题和必做题两部分)【选做题】本题包括21-24题, 请选定其中两小题作答, 若多做, 则按作答的前两小题评分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤【选修4-1: 几何证明选讲】

21. (10分) (2015•江苏) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中,  $AB=AC$ ,  $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的弦 $AE$ 交 $BC$ 于点 $D$ .

求证:  $\triangle ABD \sim \triangle AEB$ .



【选修4-2: 矩阵与变换】

22. (10分) (2015•江苏) 已知 $x, y \in \mathbb{R}$ , 向量 $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ 的属于特征值 $-2$ 的一个特征向量, 求矩阵 $A$ 以及它的另一个特征值.

【选修4-4: 坐标系与参数方程】

23. (2015•江苏) 已知圆 $C$ 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\sqrt{2}\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) - 4 = 0$ , 求圆 $C$ 的半径.

[选修4-5: 不等式选讲]

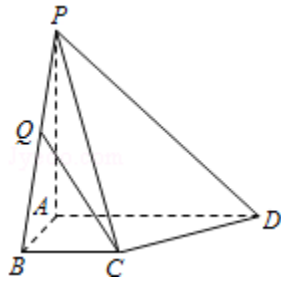
24. (2015•江苏) 解不等式 $x + |2x + 3| \geq 2$ .

【必做题】每题10分, 共计20分, 解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤

25. (10分) (2015•江苏) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 已知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ , 且四边形 $ABCD$ 为直角梯形,  $\angle ABC = \angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ,  $PA = AD = 2$ ,  $AB = BC = 1$ .

(1) 求平面 $PAB$ 与平面 $PCD$ 所成二面角的余弦值;

(2) 点 $Q$ 是线段 $BP$ 上的动点, 当直线 $CQ$ 与 $DP$ 所成的角最小时, 求线段 $BQ$ 的长.



26. (10分) (2015•江苏) 已知集合  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 设  $S_n = \{(a, b) \mid a \text{ 整除 } b \text{ 或 } b \text{ 整除 } a, a \in X, b \in Y_n\}$ , 令  $f(n)$  表示集合  $S_n$  所含元素的个数.

(1) 写出  $f(6)$  的值;

(2) 当  $n \geq 6$  时, 写出  $f(n)$  的表达式, 并用数学归纳法证明.