

2022年全国普通高等学校春季招生统一考试

上海 数学试卷

考生注意:

1. 本试卷共4页, 21道试题, 满分150分, 考试时间120分钟.
2. 本考试分设试卷和答题纸, 试卷包括试题与答题要求, 作答必须涂(选择题)或写(非选择题)在答题纸上, 在试卷上作答一律不得分.
3. 答卷前, 务必用黑色钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、班级、准考证号.

一、填空题(本大题共有12题, 满分54分)考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果, 第1题至第6题每个空格填对得4分, 第7题至第12题每个空格填对得5分, 否则一律得零分.

1. 已知复数 $z=2+i$ (其中 i 为虚数单位), 则 $\bar{z}=\underline{\hspace{2cm}}$

【解析】根据定义, $\bar{z}=2-i$.

2. 已知区间 $A=(-1, 2)$ $B=(1, 3)$, 则 $A \cap B=\underline{\hspace{2cm}}$

【解析】(1, 2).

3. 求不等式 $\frac{x-1}{x} < 0$ 的解集为_____

【解析】(0, 1).

4. 已知角 α 满足: $\tan \alpha = 3$, 则 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(\alpha) + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 - \tan(\alpha)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = -2$.

5. 设二元一次方程组 $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx + 16y = 8 \end{cases}$, 若方程组有无穷组解, 则 m 的值为_____

【解析】只需 $D=D_2=D_3=0$, 即 $\frac{1}{m} = \frac{2}{8} = \frac{m}{16}$, 从而 $m=4$.

6. 已知函数 $f(x)=x^3, f^{-1}(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 则 $f(27)=\underline{\hspace{2cm}}$

【解析】 $f(x)=x^3=27=x=3$, 所以 $f(27)=3$.

7. 已知有二项式 $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$, 其展开式的 x^4 前的系数为_____

【解析】展开通项为 $C_{12}^{10} \cdot (x^3)^{12-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r$, 需 $3(12-r)-r=4$, 则 $r=10$, 即 $C_{12}^{10} \cdot \frac{1}{x^4}$, 系数为66.

8. 在三角形ABC中, $AB=2, AC=3, A=\frac{\pi}{3}$, 则ABC外接圆的半径为_____

【解析】利用余弦定理, 得 $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos A$ 代入可得

$$|BC| = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{7}, \text{ 再利用正弦定理, 得 } 2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{\sqrt{7}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

$$\text{从而外接圆半径 } R = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

9. 设由数字1、2、3、4组成上各个位置上数字不能重复的四位数, 则大于2134的四位数的个数为_____

【解析】显然, 首位只为2或3或4, 当首位为3或4时, 均符合要求, 共 $2 \times P_3^3 = 12$ 种当

首位为2时 $\begin{cases} \text{首位为3或4均符合要求, 共 } 2 \times P_3^3 = 12 \text{ 种} \\ \text{首位为1时, 只有2143一种情况} \end{cases}$ 综上, 共 $12+4+1=17$ 种.

10. 已知直角三角形ABC, 且 $AC=BC=2$, M 为边AC的中点, 若P在边AB上运动(点P可与A,B重合), 则 $MP \cdot CP$ 的最小值为_____

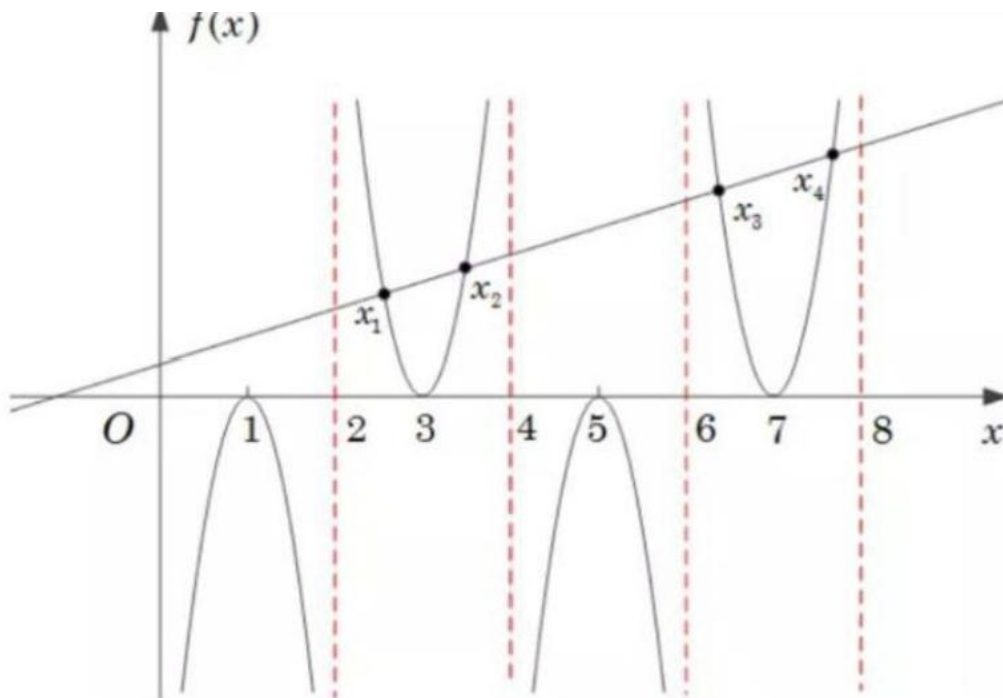
【解析】建系可得各点坐标为 $C(0,0), B(2,0), A(2,2), M(1,0), P(x,2-x)$, 其中 $0 \leq x \leq 2$, 则 $MP=(x,1-x), CP=(x,2-x)$, 从而 $MP \cdot CP = x^2 + (1-x)(2-x) = 2x^2 - 3x + 3$, 其最小值为 $\frac{15}{8}$

11. 已知双曲线 $T: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$, 任取双曲线T右支上两个不相同的点 $P(x_1, y_1), P(x_2, y_2)$, 都有 $x_1 x_2 - y_1 y_2 > 0$ 成立, 则a的取值范围是_____

【解析】设 $B(x_2, y_2)$ 显然B也在右支上, 转化为 $OF \cdot OF > 0$ 恒成立, 即角小于 90° 利用渐近线和 $a \geq 1$

12. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $x \in (0,1)$ 时的解析式为 $f(x) = \ln x$, 且 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 设方程 $f(x) = x+1$ 的正数根从小到大依次记为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) =$ _____

【解析】如图所示, 答案为2.



二、选择题(本大题共有4题，满分20分)每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得5分，否则一律得零分.

13. 以下函数的定义域为 \mathbb{R} 的是 ()

- A. $y=x^{-1}$ B. $y=x^{-\frac{1}{2}}$ C. $y=x^{\frac{1}{3}}$ D. $y=x^{\frac{1}{2}}$

【答案】 C

14. 已知实数 a, b, c, d 满足: $a > b > c > d$, 则下列选项正确的是 ()

- A. $a+d > b+c$ B. $a+c > b+d$
C. $ad > bc$ D. $ab > cd$

【答案】 B

【解析】

对于A, 可举反例: $3 > 2 > 1 > -1$; B 显然是正确的; 对于C, 可举反例: $2 > 1 > -2 > -3$.

15. 如图所示, 设上海海关楼的钟楼为正方体, 且钟楼的四个侧面均有时钟悬挂. 在0点到12点中时针与分针的转动中(包括0点, 但不包括12点), 相邻两面的时针出现两两相互垂直的情况的次数为 ()



- A. 0 B. 2

C.4

D.12

【答案】B

【解析】根据对称性，不妨考虑0, 2, 3点的情况，可结合垂直相关理论，或者建立空间向量，均可判断出只有3点和9点是垂直的，共2次.

16. 设 $\{a_n\}$ 为等比数列，设 S_n 和 T_n 分别为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和与前 n 项积，则下列命题正确的是：

()

A. 若 $S_n > S_{n+1}$ ，则 $\{S_n\}$ 为递增数列 B. 若 $T_n > T_{n+1}$ ，则 $\{T_n\}$ 为递增数列

C. 若 $\{S_n\}$ 为递增数列，则 $a_{2021} \geq a_{2022}$ D. 若 $\{T_n\}$ 为递增数列，则 $a_{2021} \geq a_{2022}$

【答案】D

【解析】

对于A, $a_1 a_2 \geq 0$ ，不正确；对于B, $a_1 = -2, q = 2, T_2 > 0, T_3 < 0$ 不正确；

对于C, $S_n - S_{n+1} = a_{n+1} > 0$ ，不正确；对于D, $a_n > 0, \frac{T_{n+1}}{T_n} = a_{n+1} > 1$ ，则 $q \geq 1$ ，正确

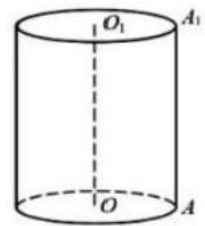
三、解答题(本大题共有5题，满分76分)解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17. (本题满分14分)本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

设有底面半径为1的圆柱 OO_1AA_1 为圆柱的母线.

(1) 若 $AA_1 = 4$ ，设 M 为 AA_1 的中点，求直线 MO 与圆柱上底面所成角；

(2) 若过 OO_1 的轴截面为正方形，求圆柱 OO_1 的侧面积和体积



【解析】

(1) $\frac{MA}{AO} = \frac{2}{1} = \tan \alpha \Rightarrow \theta = \arctan 2$;

(2) $AA_1 = \alpha$ 侧面积 $S_m = 2\pi \times 1 \times 2 = 4\pi$ ，体积 $V = \pi \times 1^2 \times 2 = 2\pi$.

18. (本题满分14分)本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

设有无穷数列 $\{a_n\}$ ，记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，其中 $a_2 = 1$

(1) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $S_2 = 3$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

(2) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 $S_2 \geq n$, 求公差 d 的取值范围.

【解析】

$$(1) a_2 = 1, S_2 = a_1 + a_2 = 3 \Rightarrow a_1 = 2 \Rightarrow q = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4;$$

$$(2) S_{2n} = \frac{(a_1 + a_{2n})2n}{2} = n(a_2 + a_{2n-1}) = n[1 + 1 + (2n-3)d] \geq n \Rightarrow (2n-3)d \geq -1,$$

$$\text{当 } n=1 \Rightarrow d \leq 1; \quad \text{当 } n \geq 2, d \geq \frac{-1}{2n-3} \Rightarrow d \geq 0 \Rightarrow d \in [0, 1].$$

19. (本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

上海某地区想设计建造一个自然保护区, 如图所示, 在一块矩形绿地 $ABCD$ 中 (其中 AB 为 30 米, AD 为 15 米), 过道 EF 将其分为两个主要区域 (E, F 分别是 AB, CD 边上动点), 监测区为以 D 为圆心, AD 为半径的四分之一圆, 古树区为四边形 $BEFC$, 且 EF 与圆弧相切, 记切点为 G .

(1) 若 $\angle ADE = 20^\circ$, 求 EF 的长 (结果精确到 0.1);

(2) E 点在线段 AB 上何处时, 才能使古树区的面积最大, 并求出最大值 (结果精确到 0.01),

如图所示: $DG \perp EF, FH \perp AB$

【解析】

$$\text{设角 } \angle DFE = \theta, \text{ 则 } DF = \frac{DG}{\sin \theta} = \frac{15}{\sin \theta}, FC = 30 - \frac{15}{\sin \theta}, EH = \frac{15}{\tan \theta} = \frac{15 \cos \theta}{\sin \theta},$$

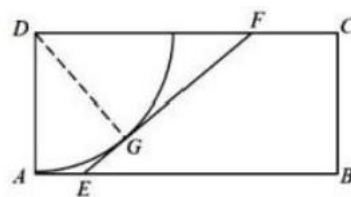
$$\text{则 } S_{\text{四}} = \frac{1}{2}(FC + BE)BC = \frac{15}{2}(2FC + EH) = \frac{15}{2} \left(60 - \frac{30}{\sin \theta} + \frac{15 \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

$$= \frac{15}{2} \left[60 - 15 \left(\frac{2 - \cos \theta}{8 \sin \theta} \right) \right]$$

$$\text{令 } f(\theta) = \frac{2 - \cos \theta}{\sin \theta} = m \Rightarrow 2 - \cos \theta = m \sin \theta,$$

$$2 = \cos \theta + m \sin \theta = \sqrt{m^2 + 1} \sin(\theta + \varphi) \leq \sqrt{m^2 + 1} \rightarrow m \geq \sqrt{3},$$

$$\text{则 } S_{\text{max}} = \frac{15}{2} (60 - 15\sqrt{3}).$$



20. (本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.

椭圆T: $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, A, B 分别为椭圆的左顶点和下顶点, 且直线 $x=a$ 上有两个不相同的点C, D (C 是第一象限的点)

(1) 设F 是椭圆T 的右焦点, 且 $\angle AFB = \frac{\pi}{6}$, 求椭圆T 的标准方程;

(2) 若C, D 两点的纵坐标分别为2和1, 判断: 直线BC 与AD 的交点是否在椭圆r 上, 并说明理由;

(3) 设直线AD 与直线BC 交椭圆T 于P, Q 两点, 且P, Q 关于原点对称, 求 $|CD|$ 的最小值.

【解析】

$$(1) \quad \angle AFB = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \angle OFB = \frac{\pi}{8} \quad \text{IOB}=1 \quad \therefore |OF|=\sqrt{3}, c=\sqrt{3}, b=1, \quad \frac{x^2}{4} + y^2 = 1;$$

$$(3) \quad l_{AD}: y = \frac{x}{2a} + \frac{1}{2} \quad l_{BC}: y = \frac{3x}{a} - 1 \quad \therefore l_{AD}: y = \frac{y_0}{x_0 + a}(x + a),$$

$$\text{令 } x = a \Rightarrow y = \frac{2ay_0}{x_0 + a}; \quad l_{BC}: y + 1 = \frac{-y_0 + 1}{-x_0},$$

$$\text{令 } x = a \Rightarrow y = \frac{ay_0 - a - x_0}{x_0}.$$

$$\text{所以 } |CD| = \left| \frac{2ay_0}{x_0 + a} - \frac{ay_0 - a - x_0}{x_0} \right|, \quad \text{设 } x_0 = a \cos \theta; y_0 = \sin \theta,$$

$$\text{代入得: } |CD| = \left| \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta + 1} - \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} + 1 \right| = \left| 2 \tan \frac{\theta}{2} + \frac{2}{1 + \tan \frac{\theta}{2}} - 2 \right| \quad (\text{注意: } \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right)),$$

$$|CD| = \left| 2 \tan \frac{\theta}{2} + \frac{2}{1 + \tan \frac{\theta}{2}} \right| \geq 6,$$

当且仅当 $\tan \frac{\theta}{2} = -2$ 时取等号;

21. (本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.

在定义域为R 的函数 $f(x)$ 上, 定义下面两个变换: $\phi: f(x) \rightarrow f(x) - f(x-1)$,

$\sigma: f(x) \rightarrow |f(x+1) - f(x)|$, 其中 $t > 0$

(1) 若 $t=1, f(x)=2^x$, 对 $f(x)$ 进行 ϕ 变换后得到函数 $g(x)$, 求方程 $g(x)=2$ 的解;

(2) 若 $f(x)=x^2$, 对 $f(x)$ 进行 σ 变换后得到函数 $h(x)$, 解不等式: $h(x) \geq f(x)$;

(3) 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$, 在 $(-x, 0)$ 上单调递增, 对函数 $f(x)$ 先作 ϕ 变换再做 w 变换得到函数 $h(x)$, 对函数 $f(x)$ 先作 ψ 变换再做 ϕ 变换得到函数 $h_2(x)$, 若对任意 $t > 0$ 恒有 $h(x) = h_2(x)$, 证明: 函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增.

【解析】(1) $g(x) = 2^4 - 2^{-1} = 2 = x = 2$,

$$(2) |(x+1)^2 - x^2| = |2x+1| \geq x^2,$$

当 $x < -\frac{1}{2}$ 时 $2x+1 \geq x^2 = x \in [(1-\sqrt{2})r, (1+\sqrt{2})r]$,

综上 $x \in [(1-\sqrt{2})t, (1+\sqrt{2})t] \cup \{-\}$;

$$(3) h(x) = [f(x+t) - f(x)] - [f(x) - f(x-t)],$$

$$h_2(x) = |f(x+1) - f(x)| - |f(x) - f(x-1)|,$$

$|A-B| \leq |A| + |B|$ 当且仅当 $AB \geq 0$ 且 $|A| \leq |B|$ 时成立, 进一步, 若 $B > 0$, 则必有 $A > B > 0$,

所以若 $f(x) - f(x-1) > 0$, 必有 $f(x+t) - f(x) > f(x) - f(x-1) > 0 (\Delta)$;

(反证法) 假设存在 $x_1 < x_2$, 满足 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 令 $t = x_2 - x_1$, 显然 $t > 0$,

此时必存在 $k \in \mathbb{N}$, 满足 $x_2 - kt < 0$, 由 $h(x_2 - k) = h_2(x_2 - kr)$, 知

$$[f(x_2 - (k-1)t) - f(x_2 - kt)] - [f(x_2 - kt) - f(x_1 - kt)]$$

$$= |f(x_2 - (k-1)t) - f(x_2 - kt)| - |f(x_2 - kt) - f(x_1 - kt)|,$$

而由于 $0 > x_2 - kt > x_1 - kt$, $f(x)$ 在 $(-x, 0)$ 上递增,

$$\text{知 } f(x_2 - kt) - f(x_1 - kt) > 0,$$

根据 (Δ) , 知 $f(x_2 - (k-1)t) - f(x_2 - kt) > 0$,

$$\text{再由 } h_1(x_2 - (k-1)t) = h_2(x_2 - (k-1)t),$$

$$\text{知 } f(x_2 - (k-2)t) - f(x_2 - (k-1)t) > 0,$$

依次类推, 最终得到 $f(x_2) - f(x_1) > 0$,

与假设矛盾, 命题得证.

题目：已知奇函数 $f(x)$ 在 $x \in (0, 1)$ 时的解析式为 $f(x) = \ln x$ ，且 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称。

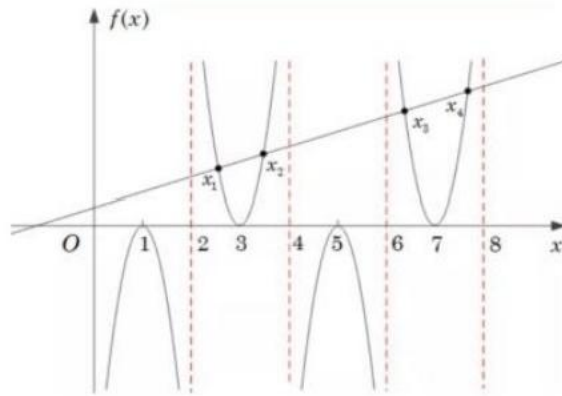
设方程 $f(x) = x+1$ 的所有正实数解从小到大排列为 x_1, x_2, x_3, \dots ， 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \underline{\hspace{2cm}}$$

证明：先证 $f(x)$ 以4为周期，由条件

$$f(-x) = -f(x), f(a+x) = f(1-x), \quad \text{则}$$

$$f(x+4) = f(-x-2) = -f(x+2) = -f(-x) = f(x).$$



易知 $4n-2 < x_{2i-1} < 4n-1 < x_{2i} < 4n, n \in \mathbb{N}^+$.

设 $x_{2i-1} = 4n-1+s, 0 < s < 1; x_{2i} = 4n-1+t, 0 < t < 1$.

$$0 = f(x_{2i-1}) - x_{2i-1} - 1 = f(4n-2+s) - (4n-2+s) - 1$$

$$= f(2+s) - s - (4n-1) = f(-s) - s - (4n-1)$$

$$= -f(s) - s - (4n-1) = -\ln s - s - (4n-1).$$

$$\ln s = -s - (4n-1) < -(4n-1),$$

故 $0 < s < e^{-(4n-1)}$,

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} [x_{2n-1} - 2(2n-1)] = 0$$

$$0 = f(x_{2i}) - x_{2i} - 1 = f(4n-1+t) - (4n-1+t) - 1$$

$$= f(-t) + t - (4n+1) = -f(t) + t - (4n+1)$$

$$= -\ln t + 1 - (4n+1).$$

$$\ln t = t - (4n+1) < -4n,$$

故 $0 < t < e^{-4n}$,

$$\text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n} - 2 \cdot 2n) = 0$$

$$\text{综上所述, } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n} - 2n) = 0$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(x_{n+1} - 2(n+1)) - (x_n - 2n) + 2] = 2$$