

2005 年宁夏高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。共 150 分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么

n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径，

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：

(1) 已知 α 为第三象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是

(A) 第一或第二象限

(B) 第二或第三象限

(C) 第一或第三象限

(D) 第二或第四象限

(2) 已知过点 A(-2, m) 和 B(m, 4) 的直线与直线 $2x+y-1=0$ 平行，则 m 的值为

(A) 0

(B) -8

(C) 2

(D) 10

(3) 在 $(x-1)(x+1)^8$ 的展开式中 x^5 的系数是

(A) -14

(B) 14

(C) -28

(D) 28

(4) 设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 V，P、Q 分别是侧棱 AA_1 、 CC_1 上的点，且 $PA=QC_1$ ，则四棱锥 B-APQC 的体积为

(A) $\frac{1}{6}V$

(B) $\frac{1}{4}V$

(C) $\frac{1}{3}V$

(D) $\frac{1}{2}V$

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{3x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \right) =$ _____

(A) $-\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{6}$

(D) $\frac{1}{6}$

(6) 若 $a = \frac{\ln 2}{2}$, $b = \frac{\ln 3}{3}$, $c = \frac{\ln 5}{5}$, 则

(A) $a < b < c$

(B) $c < b < a$

(C) $c < a < b$

(D) $b < a < c$

(7) 设 $0 \leq x \leq 2\pi$, 且 $\sqrt{1 - \sin 2x} = \sin x - \cos x$, 则

(A) $0 \leq x \leq \pi$

(B) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

(8) $\frac{2 \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha} =$

(A) $\tan \alpha$

(B) $\tan 2\alpha$

(C) 1

(D) $\frac{1}{2}$

(9) 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的焦点为 F_1 、 F_2 ，点 M 在双曲线上且 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$ ，则点 M 到 x 轴的距离为

- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

(10) 设椭圆的两个焦点分别为 F_1 、 F_2 ，过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P ，若 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰直角三角形，则椭圆的离心率是

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ (C) $2-\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2}-1$

(11) 不共面的四个定点到平面 α 的距离都相等，这样的平面 α 共有

- (A) 3 个 (B) 4 个 (C) 6 个 (D) 7 个

(12) 计算机中常用十六进制是逢 16 进 1 的计数制，采用数字 0~9 和字母 A~F 共 16 个计数符号，这些符号与十进制的数的对应关系如下表：

16 进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
10 进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

例如，用十六进制表示： $E+D=1B$ ，则 $A \times B =$

- (A) 6E (B) 72 (C) 5F (D) B0

第 II 卷

二. 填空题 (16 分)

(13) 已知复数 $Z_0 = 3 + 2i$ ，复数 Z 满足 $Z = 3Z + Z_0$ ，则复数 $Z =$ _____

(14) 已知向量 $\overrightarrow{OA} = (k, 12)$ ， $\overrightarrow{OB} = (4, 5)$ ， $\overrightarrow{OC} = (-k, 10)$ ，且 A、B、C 三点共线，则 $k =$ _____

(15) 高 l 为平面上过 $(0, 1)$ 的直线， l 的斜率等可能地取 $-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{3}, 2\sqrt{2}$ ，用 ξ 表示坐标原点到 l 的距离，由随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi =$ _____

望 $E\xi =$ _____

(16) 已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $BC = 3$ ， $AC = 4$ ， P 是 AB 上的点，则点 P 到 AC 、 BC 的距离乘积的最大值是 _____

三. 解答题：

(17) (本小题满分 12 分)

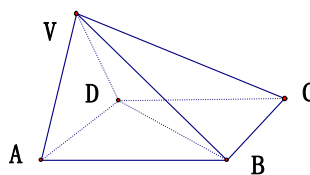
设甲、乙、丙三台机器是否需要照顾相互之间没有影响。已知在某一小时内，甲、乙都需要照顾的概率为 0.05，甲、丙都需要照顾的概率为 0.1，乙、丙都需要照顾的概率为 0.125，

(I) 求甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率分别是多少；

(II) 计算这个小时内至少有一台需要照顾的概率。

(18) (本小题满分 12 分)

在四棱锥 $V-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧面 VAD 是正三角形，平面 $VAD \perp$ 底面 $ABCD$ 。



(I) 证明 $AB \perp$ 平面 VAD 。

(II) 求面 VAD 与面 VDB 所成的二面角的大小。

(19) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。

已知 a, b, c 成等比数列，且 $\cos B = \frac{3}{4}$ 。

① 求 $\cot A + \cot B$ 的值。

② 设 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{3}{2}$ ，求 $a + c$ 的值。

(20) (本小题满分 12 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，公差 $d \neq 0$ ， a_2 是 a_1 与 a_4 的等差中项，

已知数列 $a_1, a_3, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}, \dots$ 成等比数列，求数列 $\{k_n\}$ 的通项 k_n 。

(21) (本小题满分 14 分)

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点在抛物线 $y = 2x^2$ 上， l 是 AB 的垂直平分线，

(I) 当且仅当 $x_1 + x_2$ 取何值时，直线 l 经过抛物线的焦点 F ? 证明你的结论；

(II) 当 $x_1 = 1, x_2 = -3$ 时，求直线 l 的方程。

(22) 已知函数 $f(x) = \frac{4x^2 - 7}{2 - x}, x \in [0, 1]$

① 求 $f(x)$ 的单调区间和值域。

② 设 $a \geq 1$ ，函数 $g(x) = x^3 - 3ax - 2a, x \in [0, 1]$ ，若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$ ，总存在 $x_0 \in [0, 1]$ ，

使得 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立，求 a 的取值范围。

参考答案

一. DBBCA, CCBCD, BA

二. 13、 $1 - \frac{3}{2}i$ ，14、 $-\frac{2}{3}$ ，15、 $\frac{4}{7}$ ，16、3

三. 解答题：

(17) 解：(I) 记甲、乙、丙三台机器在一小时需要照顾分别为事件 A, B, C, \dots 1 分

则 A、B、C 相互独立，

由题意得：

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0.05$$

$$P(AC) = P(A)P(C) = 0.1$$

$$P(BC) = P(B)P(C) = 0.125 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{解得：} P(A) = 0.2; P(B) = 0.25; P(C) = 0.5$$

所以，甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率分别是 0.2、0.25、0.5……6 分

(II) ∵ A、B、C 相互独立，∴ $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 相互独立，……7 分

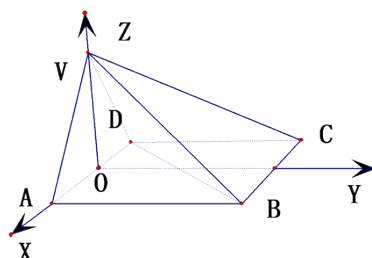
∴ 甲、乙、丙每台机器在这个小时内都不需要照顾的概率为

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0.8 \times 0.75 \times 0.5 = 0.3 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

∴ 这个小时内至少有一台需要照顾的概率为 $p = 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = 1 - 0.3 = 0.7 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

(18) 证明：(I) 作 AD 的中点 O，则 VO ⊥ 底面 ABCD. ……1 分

建立如图空间直角坐标系，并设正方形边长为 1，……2 分



$$\text{则 } A\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), B\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), C\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right),$$

$$D\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right), V\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0), \overrightarrow{AD} = (1, 0, 0), \overrightarrow{AV} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (0, 1, 0) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AV} = (0, 1, 0) \cdot \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AV} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

又 $AB \cap AV = A$

∴ $AB \perp$ 平面 VAD ……6 分

(II) 由 (I) 得 $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$ 是面 VAD 的法向量……7 分

设 $\vec{n} = (1, y, z)$ 是面 VDB 的法向量，则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{VB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1, y, z) \cdot \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ (1, y, z) \cdot (-1, -1, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ z = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \left(1, -1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AB}, \vec{n} \rangle = \frac{(0,1,0) \cdot (1,-1,\frac{\sqrt{3}}{3})}{1 \times \frac{\sqrt{21}}{3}} = -\frac{\sqrt{21}}{7}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

又由题意知，面 VAD 与面 VDB 所成的二面角，所以其大小为 $\arccos \frac{\sqrt{21}}{7}$ 12 分

(19) (I) 由 $\cos B = \frac{3}{4}$ 得 $\sin B = \sqrt{1 - (\frac{3}{4})^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$,

于是 $\cot A + \cot B = \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{\sin C \cos A + \cos C \sin A}{\sin A \sin C} \\ &= \frac{\sin(A+C)}{\sin^2 B} = \frac{\sin B}{\sin^2 B} = \frac{1}{\sin B} = \frac{4}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

(II) 由 $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{3}{2}$ 得 $ca \cdot \cos B = \frac{3}{2}$, 由 $\cos B = \frac{3}{4}$, 可得 $ca = 2$, 即 $b^2 = 2$

由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$ 得 $a^2 + c^2 = b^2 - 2ac \cdot \cos B = 5$

$\therefore a+c=3$

(20) 解：由题意得： $a_2^2 = a_1 a_4$ 1 分

即 $(a_1+d)^2 = a_1(a_1+3d)$ 3 分

又 $d \neq 0$, $\therefore a_1 = d$ 4 分

又 $a_1, a_3, a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n} \dots$ 成等比数列,

\therefore 该数列的公比为 $q = \frac{a_3}{a_1} = \frac{3d}{d} = 3$,6 分

所以 $a_{k_n} = a_1 \cdot 3^{n+1}$ 8 分

又 $a_{k_n} = a_1 + (k_n - 1)d = k_n a_1$ 10 分

$\therefore k_n = 3^{n+1}$

所以数列 $\{k_n\}$ 的通项为 $k_n = 3^{n+1}$ 12 分

(21) 解: (I) \because 抛物线 $y = 2x^2$, 即 $x^2 = \frac{y}{2}$, $\therefore p = \frac{1}{4}$,

\therefore 焦点为 $F(0, \frac{1}{8})$ 1 分

(1) 直线 l 的斜率不存在时, 显然有 $x_1 + x_2 = 0$ 3 分

(2) 直线 l 的斜率存在时, 设为 k , 截距为 b

即直线 $l: y = kx + b$

由已知得:

$$\begin{cases} \frac{y_1 + y_2}{2} = k \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + b \\ \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{k} \end{cases} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2x_1^2 + 2x_2^2}{2} = k \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + b \\ \frac{2x_1^2 - 2x_2^2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = k \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + b \\ x_1 + x_2 = -\frac{1}{2k} \end{cases} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = -\frac{1}{4} + b \geq 0$$

$$\Rightarrow b \geq \frac{1}{4}$$

即 l 的斜率存在时, 不可能经过焦点 $F(0, \frac{1}{8})$ 8 分

所以当且仅当 $x_1 + x_2 = 0$ 时, 直线 l 经过抛物线的焦点 F 9 分

(II) 当 $x_1 = 1, x_2 = -3$ 时,

直线 l 的斜率显然存在, 设为 $l: y = kx + b$ 10 分

则由 (I) 得:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = k \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + b \\ x_1 + x_2 = -\frac{1}{2k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + b = 10 & \dots\dots\dots 11 \text{ 分} \\ -\frac{1}{2k} = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{4} & \dots\dots\dots 13 \text{ 分} \\ b = \frac{41}{4} \end{cases}$$



所以直线 l 的方程为 $y = \frac{1}{4}x + \frac{41}{4}$, 即 $x - 4y + 41 = 0$ 14 分

(22)解: (I)对函数 $f(x)$ 求导, 得

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 16x - 7}{(2-x)^2} = \frac{-(2x-1)(2x-7)}{(2-x)^2}$$

令 $f'(x) = 0$ 解得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{7}{2}$

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{7}{2}$		-4		-3

所以, 当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $f(x)$ 是减函数; 当 $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时, $f(x)$ 是增函数。

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[-4, -3]$ 。

(II) 对函数 $g(x)$ 求导, 得图表 1

$$g'(x) = 3(x^2 - a^2)$$

$\because a \geq 1$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 3(1 - a^2) \leq 0$

因此当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x)$ 为减函数, 从而当 $x \in [0, 1]$ 时有

$$g(x) \in [g(1), g(0)]$$

又 $g(1) = [1 - 2a - 3a^2, -2a]$, $g(0) = -2a$, 即当 $x \in [0, 1]$ 时有

$$g(x) \in [1 - 2a - 3a^2, -2a]$$

任给 $x_1 \in [0, 1]$, $f(x_1) \in [-4, -3]$, 存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = f(x_1)$, 则

$$[1 - 2a - 3a^2, -2a] \supset [-4, -3]$$

$$\text{即} \begin{cases} 1 - 2a - 3a^2 \leq -4 \\ -2a \geq -3 \end{cases} \text{解得 } a \leq \frac{3}{2}$$

又 $a \geq 1$, 所以 a 的取值范围为 $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$