绝密★启用前

2022年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理科）

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名和座位号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 M 满足 $\complement_U M=\{1,3\}$，则（　　）

A. $2\in M$　　　B. $3\in M$　　　C. $4\notin M$　　　D. $5\notin M$

【答案】A

【解析】

【分析】先写出集合 M ,然后逐项验证即可

【详解】由题知 $M=\{2,4,5\}$,对比选项知， A 正确, BCD 错误

故选: A

2. 已知 $z=1-2i$，且 $z+a\overline{z}+b=0$，其中 a，b 为实数，则（　　）

A. $a=1,b=-2$　　　B. $a=-1,b=2$　　　C. $a=1,b=2$　　　D. $a=-1,b=-2$

【答案】A

【解析】

【分析】先算出 $\overline{z}$,再代入计算,实部与虚部都为零解方程组即可

【详解】 $z=1-2i$

$z+a\overline{z}+b=1-2\mathrm{i}+a(1+2\mathrm{i})+b=(1+a+b)+(2a-2)\mathrm{i}$

由 $z+a\overline{z}+b=0$,结合复数相等的充要条件为实部、虚部对应相等，

得 $\begin{cases}1+a+b=0\\2a-2=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$

故选: A

3. 已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{3},|\vec{a}-2\vec{b}|=3$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）

A. -2　　　　B. -1　　　　C. 1　　　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】根据给定模长，利用向量的数量积运算求解即可.

【详解】解：$\because|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2$，

又$\because|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{3},|\vec{a}-2\vec{b}|=3$,

$\therefore 9=1-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times3=13-4\vec{a}\cdot\vec{b}$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

故选：C.

4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星，为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列$\{b_n\}$：$b_1=1+\dfrac{1}{\alpha_1}$，$b_2=1+\dfrac{1}{\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2}}$，

$b_3=1+\dfrac{1}{\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2+\dfrac{1}{\alpha_3}}}$，…，依此类推，其中$\alpha_k\in\mathbf{N}^*(k=1,2,\cdots)$．则（　　）

A. $b_1<b_5$　　　　B. $b_3<b_8$　　　　C. $b_6<b_2$　　　　D. $b_4<b_7$

【答案】D

【解析】

【分析】根据$\alpha_k\in\mathbf{N}^*\left(k=1,2,\ldots\right)$，再利用数列$\left\{b_n\right\}$与$\alpha_k$的关系判断$\left\{b_n\right\}$中各项的大小，即可求解.

【详解】**[方法一]:常规解法**

因为$\alpha_k\in\mathbf{N}^*\left(k=1,2,\cdots\right)$，

所以$\alpha_1<\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2}$，$\dfrac{1}{\alpha_1}>\dfrac{1}{\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2}}$，得到$b_1>b_2$，

同理 $\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2}>\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2+\dfrac{1}{\alpha_3}}$，可得 $b_2<b_3$， $b_1>b_3$

又因为 $\dfrac{1}{\alpha_2}>\dfrac{1}{\alpha_2+\dfrac{1}{\alpha_3+\dfrac{1}{\alpha_4}}}$, $\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2+\dfrac{1}{\alpha_3}}<\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2+\dfrac{1}{\alpha_3+\dfrac{1}{\alpha_4}}}$,

故 $b_2<b_4$， $b_3>b_4$；

以此类推，可得 $b_1>b_3>b_5>b_7>\ldots$ ， $b_7>b_8$，故 A 错误；

$b_1>b_7>b_8$，故 B 错误；

$\dfrac{1}{\alpha_2}>\dfrac{1}{\alpha_2+\dfrac{1}{\alpha_3+\ldots\dfrac{1}{\alpha_6}}}$，得 $b_2<b_6$，故 C 错误；

$\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2+\dfrac{1}{\alpha_3+\dfrac{1}{\alpha_4}}}>\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2+\ldots\dfrac{1}{\alpha_6+\dfrac{1}{\alpha_7}}}$，得 $b_4<b_7$，故 D 正确.

[方法二]：特值法

不妨设 $a_n=1$, 则 $\mathrm{b}_1=2,\mathrm{b}_2=\dfrac{3}{2}$， $\mathrm{b}_3=\dfrac{5}{3},\mathrm{b}_4=\dfrac{8}{5}$， $\mathrm{b}_5=\dfrac{13}{8},\mathrm{b}_6=\dfrac{21}{13}$， $\mathrm{b}_7=\dfrac{34}{21},\mathrm{b}_8=\dfrac{55}{34}$,

$b_4<b_7$ 故 D 正确.

5. 设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(3,0)$，若 $|AF|=|BF|$，则 $|AB|=$（　　）

A. 2　　　　B. $2\sqrt{2}$　　　　C. 3　　　　D. $3\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据抛物线上的点到焦点和准线的距离相等，从而求得点 A 的横坐标，进而求得点 A 坐标，即可得到答案.

【详解】由题意得，$F(1,0)$，则 $|AF|=|BF|=2$，

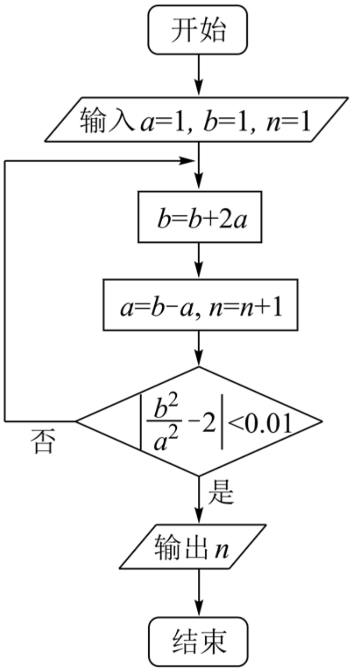
即点 A 到准线 $x=-1$ 的距离为 2，所以点 A 的横坐标为 $-1+2=1$，

不妨设点A在x轴上方，代入得，$A\left(1,2\right)$，

所以$\left|AB\right|=\sqrt{\left(3-1\right)^2+\left(0-2\right)^2}=2\sqrt{2}$.

故选：B

6. 执行下边的程序框图，输出的$n=$（　　）



A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】根据框图循环计算即可.

【详解】执行第一次循环，$b=b+2a=1+2=3$，

$a=b-a=3-1=2,n=n+1=2$，

$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{3^2}{2^2}-2\right|=\frac{1}{4}>0.01$；

执行第二次循环，$b=b+2a=3+4=7$，

$a=b-a=7-2=5,n=n+1=3$，

$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{7^2}{5^2}-2\right|=\frac{1}{25}>0.01$；

执行第三次循环，$b=b+2a=7+10=17$，

$a=b-a=17-5=12, n=n+1=4$，

$\left|\frac{b^2}{a^2}-2\right|=\left|\frac{17^2}{12^2}-2\right|=\frac{1}{144}<0.01$，此时输出 $n=4$.

故选：B

7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 AB,BC 的中点，则（　　）

A. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1

B. 平面 $B_1EF\perp$ 平面 A_1BD

C. 平面 $B_1EF//$ 平面 A_1AC

D. 平面 $B_1EF//$ 平面 A_1C_1D

【答案】A

【解析】

【分析】证明 $EF\perp$ 平面 BDD_1，即可判断 A；如图，以点 D 为原点，建立空间直角坐标系，设 $AB=2$，分别求出平面 B_1EF，A_1BD，A_1C_1D 的法向量，根据法向量的位置关系，即可判断 BCD.

【详解】解：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

$AC\perp BD$ 且 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $EF\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EF\perp DD_1$，

因为 E,F 分别为 AB,BC 的中点，

所以 $EF/\!/AC$，所以 $EF\perp BD$，

又 $BD\cap DD_1=D$，

所以 $EF\perp$ 平面 BDD_1，

又 $EF\subset$ 平面 B_1EF，

所以平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1，故 A 正确；

选项 BCD 解法一：

如图，以点 D 为原点，建立空间直角坐标系，设 $AB=2$，

则 $B_1(2,2,2),E(2,1,0),F(1,2,0),B(2,2,0),A_1(2,0,2),A(2,0,0),C(0,2,0)$，

$C_1(0,2,2)$，

则 $\overrightarrow{EF}=(-1,1,0),\overrightarrow{EB_1}=(0,1,2)$， $\overrightarrow{DB}=(2,2,0),\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$，

$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2),\overrightarrow{AC}=(-2,2,0),\overrightarrow{A_1C_1}=(-2,2,0)$，

设平面 B_1EF 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则有 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=-x_1+y_1=0\\\vec{m}\cdot\overrightarrow{EB_1}=y_1+2z_1=0\end{cases}$，可取 $\overrightarrow{m}=(2,2,-1)$，

同理可得平面 A_1BD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,-1)$，

平面 A_1AC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,0)$，

平面 A_1C_1D 的法向量为 $\overrightarrow{n_3}=(1,1,-1)$，

则 $\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n_1}=2-2+1=1\neq 0$，

所以平面 B_1EF 与平面 A_1BD 不垂直，故 B 错误；

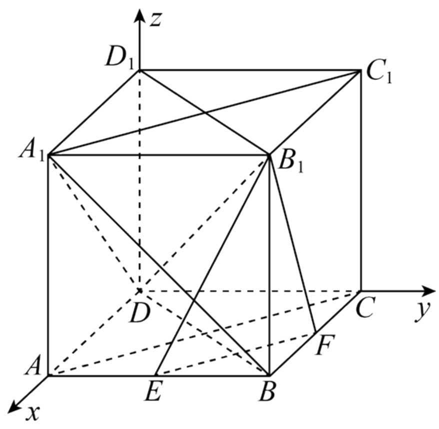
因为 $\overrightarrow{m}$ 与 $\overrightarrow{n_2}$ 不平行，

所以平面 B_1EF 与平面 A_1AC 不平行，故 C 错误；

因为 $\overrightarrow{m}$ 与 $\overrightarrow{n_3}$ 不平行，

所以平面 B_1EF 与平面 A_1C_1D 不平行，故 D 错误，

故选：A.

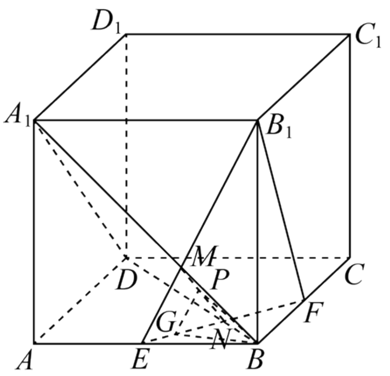


选项 BCD 解法二：

解：对于选项 B，如图所示，设 $A_1B\cap B_1E=M$， $EF\cap BD=N$，则 MN 为平面 B_1EF 与平面 A_1BD 的交线，

在$\triangle BMN$内，作$BP \perp MN$于点P，在$\triangle EMN$内，作$GP \perp MN$，交EN于点G，连结BG，

则$\angle BPG$或其补角为平面B_1EF与平面A_1BD所成二面角的平面角，



由勾股定理可知：$PB^2+PN^2=BN^2$，$PG^2+PN^2=GN^2$，

底面正方形$ABCD$中，E,F为中点，则$EF \perp BD$，

由勾股定理可得$NB^2+NG^2=BG^2$，

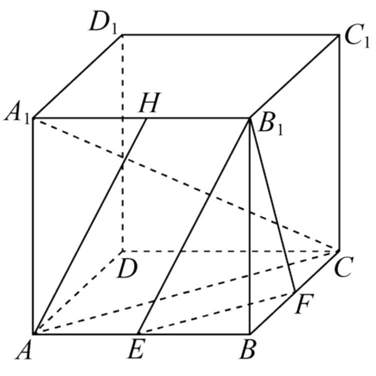
从而有：$NB^2+NG^2=\left(PB^2+PN^2\right)+\left(PG^2+PN^2\right)=BG^2$，

据此可得$PB^2+PG^2 \neq BG^2$，即$\angle BPG \neq 90^{\circ}$，

据此可得平面$B_1EF \perp$平面A_1BD不成立，选项 B 错误；

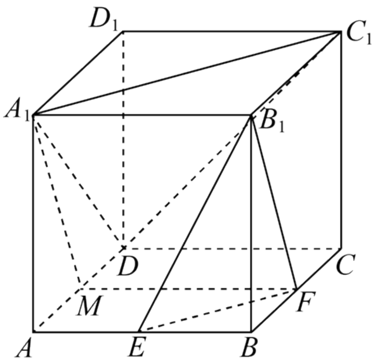
对于选项 C，取A_1B_1的中点H，则$AH \parallel B_1E$，

由于AH与平面A_1AC相交，故平面$B_1EF /\!/$平面A_1AC不成立，选项 C 错误；



对于选项 D，取AD的中点M，很明显四边形A_1B_1FM为平行四边形，则$A_1M \parallel B_1F$，

由于A_1M与平面A_1C_1D相交，故平面$B_1EF /\!/$平面A_1C_1D不成立，选项 D 错误；



故选：A.

8. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 3 项和为 168，$a_2-a_5=42$，则$a_6=$（　　）

A. 14　　B. 12　　C. 6　　D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q,q\neq 0$，易得$q\neq 1$，根据题意求出首项与公比，再根据等比数列的通项即可得解.

【详解】解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q,q\neq 0$，

若$q=1$，则$a_2-a_5=0$，与题意矛盾，

所以$q\neq 1$，

则$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=\dfrac{a_1\left(1-q^3\right)}{1-q}=168 \\ a_2-a_5=a_1q-a_1q^4=42 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a_1=96 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{cases}$，

所以$a_6=a_1q^5=3$.

故选：D.

9. 已知球 O 的半径为 1，四棱锥的顶点为 O，底面的四个顶点均在球 O 的球面上，则当该四棱锥的体积最大时，其高为（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】方法一：先证明当四棱锥的顶点 O 到底面 $ABCD$ 所在小圆距离一定时，底面 $ABCD$ 面积最大值为 $2r^2$，进而得到四棱锥体积表达式，再利用均值定理去求四棱锥体积的最大值，从而得到当该四棱锥的体积最大时其高的值.

【详解】[方法一]：**【最优解】基本不等式**

设该四棱锥底面为四边形 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 所在小圆半径为 r，

设四边形 $ABCD$ 对角线夹角为 α，

则 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\alpha\le\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\le\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r=2r^2$

（当且仅当四边形 $ABCD$ 为正方形时等号成立）

即当四棱锥的顶点 O 到底面 $ABCD$ 所在小圆距离一定时，底面 $ABCD$ 面积最大值为 $2r^2$

又设四棱锥的高为 h，则 $r^2+h^2=1$，

$$V_{O-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot 2r^2\cdot h=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{r^2\cdot r^2\cdot 2h^2}\le\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\frac{r^2+r^2+2h^2}{3}\right)^3}=\frac{4\sqrt{3}}{27}$$

当且仅当 $r^2=2h^2$ 即 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立.

故选：C

[方法二]：**统一变量＋基本不等式**

由题意可知，当四棱锥为正四棱锥时，其体积最大，设底面边长为 a，底面所在圆的半径为 r，则

$r=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以该四棱锥的高 $h=\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}$，

$$V=\frac{1}{3}a^2\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot(1-\frac{a^2}{2})}\le\frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+1-\frac{a^2}{2}}{3}\right)^3}=\frac{4}{3}\sqrt{(\frac{1}{3})^3}=\frac{4\sqrt{3}}{27}$$

(当且仅当 $\frac{a^2}{4}=1-\frac{a^2}{2}$，即 $a^2=\frac{4}{3}$ 时，等号成立)

所以该四棱锥的体积最大时，其高 $h=\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：C.

[方法三]：**利用导数求最值**

由题意可知，当四棱锥为正四棱锥时，其体积最大，设底面边长为 a，底面所在圆的半径为 r，则

$r=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，所以该四棱锥的高 $h=\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}$，$V=\frac{1}{3}a^2\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}$，令 $a^2=t(0<t<2)$，$V=\frac{1}{3}\sqrt{t^2-\frac{t^3}{2}}$，设

$f\left(t\right)=t^2-\frac{t^3}{2}$，则 $f'\left(t\right)=2t-\frac{3t^2}{2}$，

$0<t<\frac{4}{3}$，$f'\left(t\right)>0$，单调递增，$\frac{4}{3}<t<2$，$f'\left(t\right)<0$，单调递减，

所以当 $t=\frac{4}{3}$ 时，V 最大，此时 $h=\sqrt{1-\frac{a^2}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：C.

【点评】方法一：思维严谨，利用基本不等式求最值，模型熟悉，是该题的最优解；

方法二：消元，实现变量统一，再利用基本不等式求最值；

方法三：消元，实现变量统一，利用导数求最值，是最值问题的常用解法，操作简便，是通性通法.

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立．已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1,p_2,p_3，且 $p_3>p_2>p_1>0$．记该棋手连胜两盘的概率为 p，则（　　）

A. p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关

B. 该棋手在第二盘与甲比赛，p 最大

C. 该棋手在第二盘与乙比赛，p 最大

D. 该棋手在第二盘与丙比赛，p 最大

【答案】D

【解析】

【分析】该棋手连胜两盘，则第二盘为必胜盘.分别求得该棋手在第二盘与甲比赛且连胜两盘的概率 $p_甲$；该棋手在第二盘与乙比赛且连胜两盘的概率 $p_乙$；该棋手在第二盘与丙比赛且连胜两盘的概率 $p_丙$.并对三者进行比较即可解决

【详解】该棋手连胜两盘，则第二盘为必胜盘，

记该棋手在第二盘与甲比赛，比赛顺序为乙甲丙及丙甲乙的概率均为 $\frac{1}{2}$，

则此时连胜两盘的概率为 $p_甲$

则 $p_甲=\frac{1}{2}\left[(1-p_2)p_1p_3+p_2p_1(1-p_3)\right]+\frac{1}{2}\left[(1-p_3)p_1p_2+p_3p_1(1-p_2)\right]$

$=p_1(p_2+p_3)-2p_1p_2p_3$；

记该棋手在第二盘与乙比赛，且连胜两盘的概率为 $p_乙$，

则 $p_乙=(1-p_1)p_2p_3+p_1p_2(1-p_3)=p_2(p_1+p_3)-2p_1p_2p_3$

记该棋手在第二盘与丙比赛，且连胜两盘的概率为 $p_丙$

则 $p_{丙}=(1-p_1)p_3p_2+p_1p_3(1-p_2)=p_3(p_1+p_2)-2p_1p_2p_3$

则 $p_{甲}-p_{乙}=p_1(p_2+p_3)-2p_1p_2p_3-\left[p_2(p_1+p_3)-2p_1p_2p_3\right]=\left(p_1-p_2\right)p_3<0$

$p_{乙}-p_{丙}=p_2(p_1+p_3)-2p_1p_2p_3-\left[p_3(p_1+p_2)-2p_1p_2p_3\right]=\left(p_2-p_3\right)p_1<0$

即 $p_{甲}<p_{乙}$， $p_{乙}<p_{丙}$，

则该棋手在第二盘与丙比赛，p 最大.选项 D 判断正确；选项 BC 判断错误；

p 与该棋手与甲、乙、丙的比赛次序有关.选项 A 判断错误.

故选：D

11. 双曲线 C 的两个焦点为 F_1,F_2，以 C 的实轴为直径的圆记为 D，过 F_1 作 D 的切线与 C 交于 M，N 两点，且 $\cos\angle F_1NF_2=\dfrac{3}{5}$，则 C 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

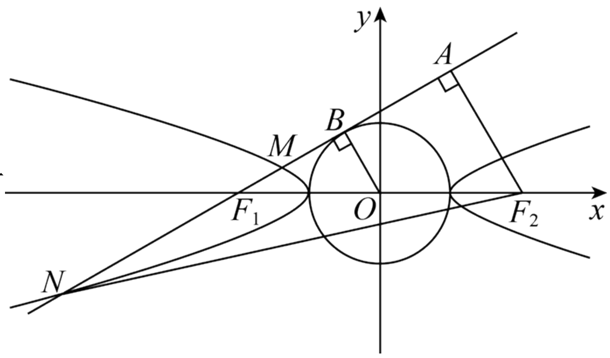
【答案】AC

【解析】

【分析】依题意不妨设双曲线焦点在 x 轴，设过 F_1 作圆 D 的切线切点为 G，利用正弦定理结合三角变换、双曲线的定义得到 $2b=3a$ 或 $a=2b$，即可得解，注意就 M,N 在双支上还是在单支上分类讨论.

【详解】**[方法一]：几何法，双曲线定义的应用**

情况一



M、N 在双曲线的同一支，依题意不妨设双曲线焦点在 x 轴，设过 F_1 作圆 D 的切线切点为 B，

所以 $\mathrm{OB}\perp \mathrm{F_1N}$，因为 $\cos\angle F_1NF_2=\dfrac{3}{5}>0$，所以 N 在双曲线的左支，

$|\mathrm{OB}|=a$，$|OF_1|=c$， $|\mathrm{F_1B}|=\mathrm{b}$，设 $\angle F_1NF_2=\alpha$，由即 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，则 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，

$\left|\mathrm{NA}\right|=\dfrac{3}{2}a,\left|\mathrm{NF}_2\right|=\dfrac{5}{2}a$

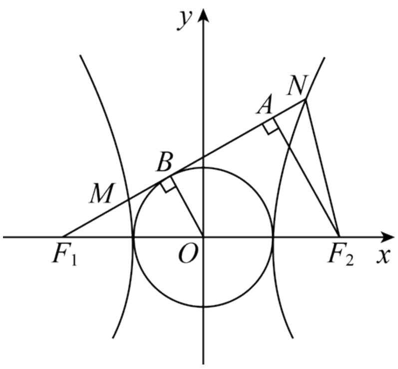
$\left|\mathrm{NF}_2\right|-\left|\mathrm{NF}_1\right|=2a$

$\dfrac{5}{2}a-\left(\dfrac{3}{2}a-2b\right)=2a,$

$2\mathrm{b}=a,\therefore \mathrm{e}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

选 A

情况二



若 M、N 在双曲线的两支，因为$\cos\angle F_1NF_2=\dfrac{3}{5}>0$，所以$N$在双曲线的右支，

所以$\left|\mathrm{OB}\right|=a$，$\left|OF_1\right|=c$， $\left|\mathrm{F_1B}\right|=\mathrm{b}$，设$\angle F_1NF_2=\alpha$，

由$\cos\angle F_1NF_2=\dfrac{3}{5}$，即$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，则$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，

$\left|\mathrm{NA}\right|=\dfrac{3}{2}a,\left|\mathrm{NF}_2\right|=\dfrac{5}{2}a$

$\left|\mathrm{NF}_1\right|-\left|\mathrm{NF}_2\right|=2a$

$\dfrac{3}{2}a+2b-\dfrac{5}{2}a=2a,$

所以$2b=3a$，即$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$，

所以双曲线的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

选 C

[方法二]：答案回代法

A选项$\mathrm{e}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

特值双曲线

$\frac{x^2}{4}-y^2=1,\therefore \mathrm{F}_1\left(-\sqrt{5},0\right),\mathrm{F}_2\left(\sqrt{5},0\right)$,

过F_1且与圆相切的一条直线为$\mathrm{y}=2\left(\mathrm{x}+\sqrt{5}\right)$,

$\because$两交点都在左支,$\therefore \mathrm{N}\left(-\frac{6}{5}\sqrt{5},-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$,

$\therefore \left|\mathrm{NF}_2\right|=5,\left|\mathrm{NF}_1\right|=1,\left|\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\right|=2\sqrt{5}$,

则$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$,

C选项$\mathrm{e}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

特值双曲线$\frac{\mathrm{x}^2}{4}-\frac{\mathrm{y}^2}{9}=1,\therefore \mathrm{F}_1\left(-\sqrt{13},0\right),\mathrm{F}_2\left(\sqrt{13},0\right)$,

过F_1且与圆相切的一条直线为$\mathrm{y}=\frac{2}{3}\left(\mathrm{x}+\sqrt{13}\right)$,

$\because$两交点在左右两支，N 在右支，$\therefore \mathrm{N}\left(\frac{14}{13}\sqrt{13},\frac{18}{13}\sqrt{13}\right)$,

$\therefore \left|\mathrm{NF}_2\right|=5,\left|\mathrm{NF}_1\right|=9,\left|\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2\right|=2\sqrt{13}$,

则$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}$,

[方法三]：

依题意不妨设双曲线焦点在x轴，设过F_1作圆D的切线切点为G,

若M,N分别在左右支,

因为$OG\perp NF_1$，且$\cos\angle F_1NF_2=\frac{3}{5}>0$，所以$N$在双曲线的右支,

又$\left|OG\right|=a$，$\left|OF_1\right|=c$，$\left|GF_1\right|=b$,

设$\angle F_1NF_2=\alpha$，$\angle F_2F_1N=\beta$,

在$\triangle F_1NF_2$中，有$\frac{\left|NF_2\right|}{\sin\beta}=\frac{\left|NF_1\right|}{\sin\left(\alpha+\beta\right)}=\frac{2c}{\sin\alpha}$,

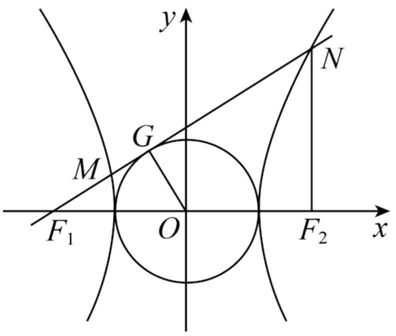
故$\dfrac{|NF_1|-|NF_2|}{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta}=\dfrac{2c}{\sin\alpha}$即$\dfrac{a}{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\alpha}$，

所以$\dfrac{a}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\alpha}$，

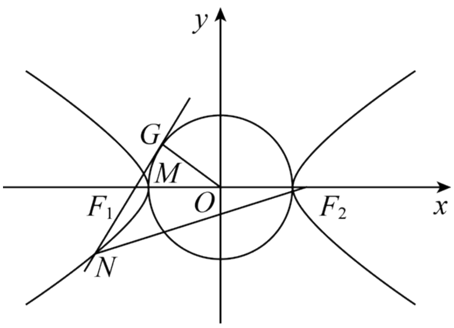
而$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{a}{c}$，$\cos\beta=\dfrac{b}{c}$，故$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，

代入整理得到$2b=3a$，即$\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$，

所以双曲线的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$



若M,N均在左支上，



同理有$\dfrac{|NF_2|}{\sin\beta}=\dfrac{|NF_1|}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{2c}{\sin\alpha}$，其中$\beta$为钝角，故$\cos\beta=-\dfrac{b}{c}$，

故$\dfrac{|NF_2|-|NF_1|}{\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{2c}{\sin\alpha}$即$\dfrac{a}{\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\alpha}$，

代入$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\beta=\dfrac{a}{c}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，整理得到：$\dfrac{a}{4b+2a}=\dfrac{1}{4}$，

故$a=2b$，故$e=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

故选：AC.

12. 已知函数 $f(x), g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)+g(2-x)=5, g(x)-f(x-4)=7$．若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$，则 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=$（　　）

A. -21　　B. -22　　C. -23　　D. -24

【答案】D

【解析】

【分析】根据对称性和已知条件得到 $f(x)+f(x-2)=-2$，从而得到 $f(3)+f(5)+\ldots+f(21)=-10$，$f(4)+f(6)+\ldots+f(22)=-10$，然后根据条件得到 $f(2)$ 的值，再由题意得到 $g(3)=6$ 从而得到 $f(1)$ 的值即可求解.

【详解】因为 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，

所以 $g(2-x)=g(x+2)$，

因为 $g(x)-f(x-4)=7$，所以 $g(x+2)-f(x-2)=7$，即 $g(x+2)=7+f(x-2)$，

因为 $f(x)+g(2-x)=5$，所以 $f(x)+g(x+2)=5$，

代入得 $f(x)+[7+f(x-2)]=5$，即 $f(x)+f(x-2)=-2$，

所以 $f(3)+f(5)+\ldots+f(21)=(-2)\times 5=-10$，

$f(4)+f(6)+\ldots+f(22)=(-2)\times 5=-10$.

因为 $f(x)+g(2-x)=5$，所以 $f(0)+g(2)=5$，即 $f(0)=1$，所以 $f(2)=-2-f(0)=-3$.

因为 $g(x)-f(x-4)=7$，所以 $g(x+4)-f(x)=7$，又因为 $f(x)+g(2-x)=5$，

联立得，$g(2-x)+g(x+4)=12$，

所以 $y=g(x)$ 的图像关于点 $(3,6)$ 中心对称，因为函数 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

所以 $g(3)=6$

因为 $f(x)+g(x+2)=5$，所以 $f(1)=5-g(3)=-1$.

所以

$$\sum_{k=1}^{22} f(k)=f(1)+f(2)+[f(3)+f(5)+\ldots+f(21)]+[f(4)+f(6)+\ldots+f(22)]=-1-3-10-10=-24$$

.

故选：D

【点睛】含有对称轴或对称中心的问题往往条件比较隐蔽，考生需要根据已知条件进行恰当的转化，然后得到所需的一些数值或关系式从而解题.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 从甲、乙等 5 名同学中随机选 3 名参加社区服务工作，则甲、乙都入选的概率为____________.

【答案】$\frac{3}{10}$##0.3

【解析】

【分析】根据古典概型计算即可

【详解】**解法一**：设这 5 名同学分别为甲，乙，1,2,3，从 5 名同学中随机选 3 名，

有：(甲，乙，1)，(甲，乙，2)，(甲，乙，3)，(甲，1，2)，(甲，1，3)，(甲，2，3)，(乙，1，2)，(乙，1，3)，(乙，2，3)，(1，2，3)，共 10 种选法；

其中，甲、乙都入选的选法有 3 种，故所求概率 $P=\frac{3}{10}$.

故答案为：$\frac{3}{10}$.

解法二：从 5 名同学中随机选 3 名的方法数为 $\mathrm{C}_5^3=10$

甲、乙都入选的方法数为 $\mathrm{C}_3^1=3$，所以甲、乙都入选的概率 $P=\frac{3}{10}$

故答案为：$\frac{3}{10}$

14. 过四点 $(0,0),(4,0),(-1,1),(4,2)$ 中的三点的一个圆的方程为____________.

【答案】$(x-2)^2+(y-3)^2=13$ 或 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 或 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$ 或 $\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$.

【解析】

【分析】方法一：设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，根据所选点的坐标，得到方程组，解得即可；

【详解】**[方法一]：圆的一般方程**

依题意设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

（1）若过$(0,0)$，$(4,0)$，$(-1,1)$，则$\begin{cases}F=0\\16+4D+F=0\\1+1-D+E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}F=0\\D=-4\\E=-6\end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-4x-6y=0$，即$(x-2)^2+(y-3)^2=13$；

（2）若过$(0,0)$，$(4,0)$，$(4,2)$，则$\begin{cases}F=0\\16+4D+F=0\\16+4+4D+2E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}F=0\\D=-4\\E=-2\end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-4x-2y=0$，即$(x-2)^2+(y-1)^2=5$；

（3）若过$(0,0)$，$(4,2)$，$(-1,1)$，则$\begin{cases}F=0\\1+1-D+E+F=0\\16+4+4D+2E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}F=0\\D=-\frac{8}{3}\\E=-\frac{14}{3}\end{cases}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}y=0$，即$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$；

（4）若过$(-1,1)$，$(4,0)$，$(4,2)$，则$\begin{cases}1+1-D+E+F=0\\16+4D+F=0\\16+4+4D+2E+F=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}F=-\frac{16}{5}\\D=-\frac{16}{5}\\E=-2\end{cases}$，所以圆的方程

为$x^2+y^2-\frac{16}{5}x-2y-\frac{16}{5}=0$，即$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$；

故答案为：$(x-2)^2+(y-3)^2=13$或$(x-2)^2+(y-1)^2=5$或$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$或

$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$.

[方法二]：【最优解】圆的标准方程（三点中的两条中垂线的交点为圆心）

设点$A(0,0)$，$B(4,0)$，$C(-1,1)$，$D(4,2)$

（1）若圆过A、B、C三点，圆心在直线$x=2$，设圆心坐标为$(2,a)$，

则$4+a^2=9+(a-1)^2\Rightarrow a=3,r=\sqrt{4+a^2}=\sqrt{13}$，所以圆的方程为$(x-2)^2+(y-3)^2=13$；

（2）若圆过 A、B、D 三点， 设圆心坐标为 $(2,a)$，则

$4+a^2=4+(a-2)^2 \Rightarrow a=1, r=\sqrt{4+a^2}=\sqrt{5}$，所以圆的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$；

（3）若圆过 A、C、D 三点，则线段 AC 的中垂线方程为 $y=x+1$，线段 AD 的中垂线方程 为

$y=-2x+5$，联立得 $x=\frac{4}{3}, y=\frac{7}{3} \Rightarrow r=\frac{\sqrt{65}}{3}$ ，所以圆的方程为 $(x-\frac{4}{3})^2+(y-\frac{7}{3})^2=\frac{65}{9}$；

（4）若圆过 B、C、D 三点，则线段 BD 的中垂线方程为 $y=1$， 线段 BC 中垂线方程为 $y=5x-7$，联立得 $x=\frac{8}{5}, y=1 \Rightarrow r=\frac{13}{5}$，所以圆的方程为 $(x-\frac{8}{5})^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$.

故答案为：$(x-2)^2+(y-3)^2=13$ 或 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ 或 $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{65}{9}$ 或 $\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$.

【整体点评】方法一；利用圆过三个点，设圆的一般方程，解三元一次方程组，思想简单，运算稍繁；方法二；利用圆的几何性质，先求出圆心再求半径，运算稍简洁，是该题的最优解.

15. 记函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 T，若 $f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $x=\frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点，则 ω 的最小值为____________.

【答案】3

【解析】

【分析】首先表示出 T，根据 $f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 求出 φ，再根据 $x=\frac{\pi}{9}$ 为函数的零点，即可求出 ω 的取值，从而得解；

【详解】解： 因为 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$，（$\omega>0$， $0<\varphi<\pi$）

所以最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，因为 $f(T)=\cos\left(\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\varphi\right)=\cos(2\pi+\varphi)=\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，即 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

又 $x=\frac{\pi}{9}$ 为 $f(x)$ 的零点，所以 $\frac{\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$，解得 $\omega=3+9k, k\in Z$，

因为$\omega>0$，所以当$k=0$时$\omega_{\min}=3$；

故答案为：3

16. 已知$x=x_1$和$x=x_2$分别是函数$f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2$（$a>0$且$a\neq 1$）的极小值点和极大值点．若$x_1<x_2$，则a的取值范围是____________.

【答案】$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$

【解析】

【分析】法一：依题可知，方程$2\ln a\cdot a^x-2\mathrm{e}x=0$的两个根为$x_1,x_2$，即函数$y=\ln a\cdot a^x$与函数$y=\mathrm{e}x$的图象有两个不同的交点，构造函数$g(x)=\ln a\cdot a^x$，利用指数函数的图象和图象变换得到$g(x)$的图象，利用导数的几何意义求得过原点的切线的斜率，根据几何意义可得出答案.

【详解】[方法一]：**【最优解】转化法，零点的问题转为函数图象的交点**

因为$f'(x)=2\ln a\cdot a^x-2\mathrm{e}x$，所以方程$2\ln a\cdot a^x-2\mathrm{e}x=0$的两个根为$x_1,x_2$，

即方程$\ln a\cdot a^x=\mathrm{e}x$的两个根为$x_1,x_2$，

即函数$y=\ln a\cdot a^x$与函数$y=\mathrm{e}x$的图象有两个不同的交点，

因为x_1,x_2分别是函数$f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2$的极小值点和极大值点，

所以函数$f(x)$在$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$上递减，在(x_1,x_2)上递增，

所以当时$(-\infty,x_1)(x_2,+\infty)$，$f'(x)<0$，即$y=\mathrm{e}x$图象在$y=\ln a\cdot a^x$上方

当$x\in(x_1,x_2)$时，$f'(x)>0$，即$y=\mathrm{e}x$图象在$y=\ln a\cdot a^x$下方

$a>1$，图象显然不符合题意，所以$0<a<1$.

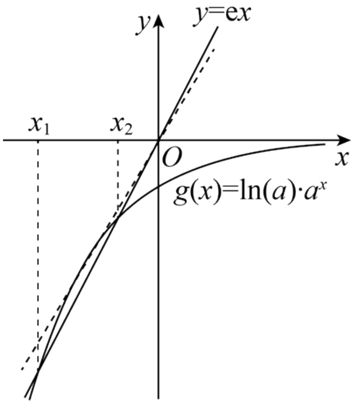
令$g(x)=\ln a\cdot a^x$，则$g'(x)=\ln^2 a\cdot a^x,0<a<1$，

设过原点且与函数$y=g(x)$的图象相切的直线的切点为$\left(x_0,\ln a\cdot a^{x_0}\right)$，

则切线的斜率为$g'(x_0)=\ln^2 a\cdot a^{x_0}$，故切线方程为$y-\ln a\cdot a^{x_0}=\ln^2 a\cdot a^{x_0}(x-x_0)$，

则有$-\ln a\cdot a^{x_0}=-x_0\ln^2 a\cdot a^{x_0}$，解得$x_0=\frac{1}{\ln a}$，则切线的斜率为$\ln^2 a\cdot a^{\frac{1}{\ln a}}=\mathrm{e}\ln^2 a$，

因为函数 $y=\ln a\cdot a^x$ 与函数 $y=\mathrm{e}x$ 的图象有两个不同的交点，



所以 $\mathrm{e}\ln^2 a<\mathrm{e}$，解得 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<\mathrm{e}$，又 $0<a<1$，所以 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<1$，

综上所述，a 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$.

[方法二]：**【通性通法】构造新函数，二次求导**

$f'(x)=2\ln a\cdot a^x-2\mathrm{e}x=0$ 的两个根为 x_1,x_2

因为 x_1,x_2 分别是函数 $f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2$ 的极小值点和极大值点，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上递减，在 (x_1,x_2) 上递增，

设函数 $\mathrm{g}(x)=f'(x)=2\left(a^x\ln a-ex\right)$，则 $'(x)=2a^x(\ln a)^2-2e$，

若 $a>1$，则 $'(x)$ 在 R 上单调递增，此时若 $f'(x_0)=0$，

则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，此时若有 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数

$f(x)=2a^x-ex^2(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的极小值点和极大值点，则 $x_1>x_2$，不符合题意；

若 $0<a<1$，则 $'(x)$ 在 R 上单调递减，此时若 $'(x_0)=0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，令 $'(x_0)=0$，则 $a^{x_0}=\dfrac{e}{(\ln a)^2}$，此时若有 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数

$f(x)=2a^x-ex^2(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的极小值点和极大值点，且 $x_1<x_2$，则需满足 $f'(x_0)>0$，

$f'(x_0)=2\left(a^{x_0}\ln a-ex_0\right)=2\left(\dfrac{e}{\ln a}-ex_0\right)>0$，即 $x_0<\dfrac{1}{\ln a}$，$x_0\ln a>1$ 故 $\ln a^{x_0}=x_0\ln a=\ln\dfrac{e}{(\ln a)^2}>1$，

所以 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a<1$.

【整体点评】法一：利用函数的零点与两函数图象交点的关系，由数形结合解出，突出“小题小做”，是

该题的最优解；

法二：通过构造新函数，多次求导判断单调性，根据极值点的大小关系得出不等式，解出即可，该法属于通性通法．

三、解答题：共 0 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. 记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$．

（1）证明：$2a^2=b^2+c^2$；

（2）若$a=5,\cos A=\dfrac{25}{31}$，求$\triangle ABC$的周长．

【答案】（1）见解析　　（2）14

【解析】

【分析】（1）利用两角差的正弦公式化简，再根据正弦定理和余弦定理化角为边，从而即可得证；

（2）根据（1）的结论结合余弦定理求出bc，从而可求得$b+c$，即可得解.

【小问 1 详解】

证明：因为$\sin C\sin\left(A-B\right)=\sin B\sin\left(C-A\right)$，

所以$\sin C\sin A\cos B-\sin C\sin B\cos A=\sin B\sin C\cos A-\sin B\sin A\cos C$，

所以$ac\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-2bc\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

即$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}-\left(b^2+c^2-a^2\right)=-\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$，

所以$2a^2=b^2+c^2$；

【小问 2 详解】

解：因为$a=5,\cos A=\dfrac{25}{31}$，

由（1）得$b^2+c^2=50$，

由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

则$50-\dfrac{50}{31}bc=25$，

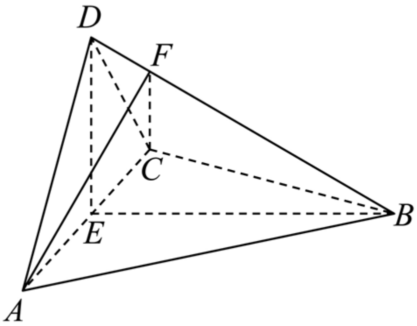
所以$bc=\dfrac{31}{2}$，

故$\left(b+c\right)^2=b^2+c^2+2bc=50+31=81$，

所以$b+c=9$，

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=14$.

18. 如图，四面体$ABCD$中，$AD\perp CD, AD=CD, \angle ADB=\angle BDC$，$E$为$AC$的中点.



（1）证明：平面$BED\perp$平面ACD；

（2）设$AB=BD=2, \angle ACB=60^\circ$，点$F$在$BD$上，当$\triangle AFC$的面积最小时，求$CF$与平面$ABD$所成的角的正弦值.

【答案】（1）证明过程见解析

（2）CF与平面ABD所成的角的正弦值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

【解析】

【分析】（1）根据已知关系证明$\triangle ABD\cong\triangle CBD$，得到$AB=CB$，结合等腰三角形三线合一得到垂直关系，结合面面垂直的判定定理即可证明；

（2）根据勾股定理逆用得到$BE\perp DE$，从而建立空间直角坐标系，结合线面角的运算法则进行计算即可.

【小问1详解】

因为$AD=CD$，E为AC的中点，所以$AC\perp DE$；

在$\triangle ABD$和$\triangle CBD$中，因为$AD=CD, \angle ADB=\angle CDB, DB=DB$，

所以$\triangle ABD\cong\triangle CBD$，所以$AB=CB$，又因为$E$为$AC$的中点，所以$AC\perp BE$；

又因为$DE, BE\subset$平面BED，$DE\cap BE=E$，所以$AC\perp$平面BED，

因为$AC\subset$平面ACD，所以平面$BED\perp$平面ACD.

【小问2详解】

连接EF，由（1）知，$AC\perp$平面BED，因为$EF\subset$平面BED，

所以 $AC \perp EF$，所以 $S_{\triangle AFC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot EF$，

当 $EF \perp BD$ 时，EF 最小，即 $\triangle AFC$ 的面积最小.

因为 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$，所以 $CB=AB=2$，

又因为 $\angle ACB=60^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形，

因为 E 为 AC 的中点，所以 $AE=EC=1$，$BE=\sqrt{3}$，

因为 $AD \perp CD$，所以 $DE=\dfrac{1}{2}AC=1$，

在 $\triangle DEB$ 中，$DE^2+BE^2=BD^2$，所以 $BE \perp DE$.

以 E 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$，

则 $A(1,0,0),B\left(0,\sqrt{3},0\right),D(0,0,1)$，所以 $\overrightarrow{AD}=(-1,0,1),\overrightarrow{AB}=\left(-1,\sqrt{3},0\right)$，

设平面 ABD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-x+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，取 $y=\sqrt{3}$，则 $\vec{n}=\left(3,\sqrt{3},3\right)$，

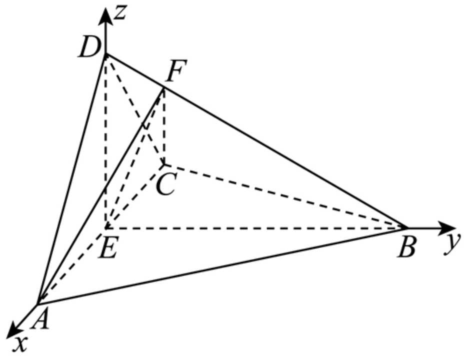
又因为 $C(-1,0,0),F\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4}\right)$，所以 $\overrightarrow{CF}=\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4}\right)$，

所以 $\cos\vec{n},\overrightarrow{CF}=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{CF}\right|}=\dfrac{6}{\sqrt{21}\times\sqrt{\dfrac{7}{4}}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，

设 CF 与平面 ABD 所成的角为 $\theta\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\sin\theta=\left|\cos\vec{n},\overrightarrow{CF}\right|=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，

所以 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.



19. 某地经过多年的环境治理，已将荒山改造成了绿水青山．为估计一林区某种树木的总材积量，随机选取了 10 棵这种树木，测量每棵树的根部横截面积（单位：m^2）和材积量（单位：m^3），得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总和
根部横截面积 x_i	0.04	0.06	0.04	0.08	0.08	0.05	0.05	0.07	0.07	0.06	0.6
材积量 y_i	0.25	0.40	0.22	0.54	0.51	0.34	0.36	0.46	0.42	0.40	3.9

并计算得 $\sum\limits_{i=1}^{10} x_i^2 = 0.038, \sum\limits_{i=1}^{10} y_i^2 = 1.6158, \sum\limits_{i=1}^{10} x_i y_i = 0.2474$．

（1）估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

（2）求该林区这种树木的根部横截面积与材积量的样本相关系数（精确到 0.01）；

（3）现测量了该林区所有这种树木的根部横截面积，并得到所有这种树木的根部横截面积总和为 $186\mathrm{m}^2$．已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比．利用以上数据给出该林区这种树木的总材积量的估计值．

附：相关系数 $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}, \sqrt{1.896} \approx 1.377$．

【答案】（1）$0.06\mathrm{m}^2$；$0.39\mathrm{m}^3$

（2）0.97

（3）$1209\mathrm{m}^3$

【解析】

【分析】（1）计算出样本的一棵根部横截面积的平均值及一棵材积量平均值，即可估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量；

（2）代入题给相关系数公式去计算即可求得样本的相关系数值；

（3）依据树木的材积量与其根部横截面积近似成正比，列方程即可求得该林区这种树木的总材积量的估计值．

【小问 1 详解】

样本中 10 棵这种树木的根部横截面积的平均值 $\overline{x}=\frac{0.6}{10}=0.06$

样本中 10 棵这种树木的材积量的平均值 $\overline{y}=\frac{3.9}{10}=0.39$

据此可估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积为 $0.06\mathrm{m}^2$，

平均一棵的材积量为 $0.39\mathrm{m}^3$

【小问 2 详解】

$$r=\frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{10}\left(x_{\mathrm{i}}-\overline{x}\right)\left(y_{\mathrm{i}}-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{\mathrm{i}=1}^{10}\left(x_{\mathrm{i}}-\overline{x}\right)^2\sum_{\mathrm{i}=1}^{10}\left(y_{\mathrm{i}}-\overline{y}\right)^2}}=\frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{10}x_{\mathrm{i}}y_{\mathrm{i}}-10\overline{xy}}{\sqrt{\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{10}x_{\mathrm{i}}^2-10\overline{x}^2\right)\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{10}y_{\mathrm{i}}^2-10\overline{y}^2\right)}}$$

$$=\frac{0.2474-10\times0.06\times0.39}{\sqrt{(0.038-10\times0.06^2)(1.6158-10\times0.39^2)}}=\frac{0.0134}{\sqrt{0.0001896}}\approx\frac{0.0134}{0.01377}\approx0.97$$

则 $r\approx0.97$

【小问 3 详解】

设该林区这种树木的总材积量的估计值为 $Y\mathrm{m}^3$，

又已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比，

可得 $\frac{0.06}{0.39}=\frac{186}{Y}$，解之得 $Y=1209\mathrm{m}^3$.

则该林区这种树木的总材积量估计为 $1209\mathrm{m}^3$

20. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A\left(0,-2\right),B\left(\frac{3}{2},-1\right)$ 两点.

（1）求 E 的方程；

（2）设过点 $P\left(1,-2\right)$ 的直线交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$. 证明：直线 HN 过定点.

【答案】（1）$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$

（2）$(0,-2)$

【解析】

【分析】（1）将给定点代入设出的方程求解即可；

（2）设出直线方程，与椭圆 C 的方程联立，分情况讨论斜率是否存在，即可得解.

【小问 1 详解】

解：设椭圆 E 的方程为 $mx^2+ny^2=1$，过 $A\left(0,-2\right),B\left(\frac{3}{2},-1\right)$，

则 $\begin{cases}4n=1\\ \frac{9}{4}m+n=1\end{cases}$，解得 $m=\frac{1}{3}$， $n=\frac{1}{4}$，

所以椭圆 E 的方程为： $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

$A(0,-2),B(\frac{3}{2},-1)$，所以 $AB:y+2=\frac{2}{3}x$，

①若过点 $P(1,-2)$ 的直线斜率不存在，直线 $x=1$.代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$，

可得 $M(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$， $N(1,\frac{2\sqrt{6}}{3})$，代入 AB 方程 $y=\frac{2}{3}x-2$，可得

$T(-\sqrt{6}+3,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$，由 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$ 得到 $H(-2\sqrt{6}+5,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$.求得 HN 方程：

$y=(2+\frac{2\sqrt{6}}{3})x-2$，过点 $(0,-2)$.

②若过点 $P(1,-2)$ 的直线斜率存在，设 $kx-y-(k+2)=0,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}kx-y-(k+2)=0\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得 $(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$，

可得 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{6k(2+k)}{3k^2+4}\\ x_1x_2=\frac{3k(4+k)}{3k^2+4}\end{cases}$， $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-8\left(2+k\right)}{3k^2+4}\\ y_1y_2=\frac{4\left(4+4k-2k^2\right)}{3k^2+4}\end{cases}$，

且 $x_1y_2+x_2y_1=\frac{-24k}{3k^2+4}(*)$

联立 $\begin{cases}y=y_1\\ y=\frac{2}{3}x-2\end{cases}$，可得 $T(\frac{3y_1}{2}+3,y_1),H(3y_1+6-x_1,y_1)$.

可求得此时 $HN: y-y_2=\frac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$，

将 $(0,-2)$，代入整理得 $2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$，

将(*)代入，得 $24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0,$

显然成立，

综上，可得直线 HN 过定点 $(0,-2)$.

【点睛】求定点、定值问题常见的方法有两种：

①从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；

②直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

21. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)+ax\mathrm{e}^{-x}$

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）若 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-1,0\right),\left(0,+\infty\right)$ 各恰有一个零点，求 a 的取值范围.

【答案】（1） $y=2x$

（2） $(-\infty,-1)$

【解析】

【分析】（1）先算出切点,再求导算出斜率即可

（2）求导,对 a 分类讨论,对 x 分 $(-1,0),(0,+\infty)$ 两部分研究

【小问 1 详解】

$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$

当 $a=1$ 时, $f(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{\mathrm{e}^x}$, $f(0)=0$,所以切点为 $(0,0)$ $f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}$, $f'(0)=2$,所以切线斜率为 2

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=2x$

【小问 2 详解】

$f(x)=\ln(1+x)+\frac{ax}{\mathrm{e}^x}$

$f^{'}(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{a(1-x)}{\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^x+a\left(1-x^2\right)}{(1+x)\mathrm{e}^x}$

设 $g(x)=\mathrm{e}^x+a\left(1-x^2\right)$

1° 若 $a>0$,当 $x\in(-1,0), g(x)=\mathrm{e}^x+a\left(1-x^2\right)>0$,即 $f'(x)>0$

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增, $f(x)<f(0)=0$

故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上没有零点,不合题意

2° 若 $-1\le a\le 0$,当 $x\in(0,+\infty)$,则 $g^{'}(x)=\mathrm{e}^x-2ax>0$

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增所以 $g(x)>g(0)=1+a\ge 0$,即 $f'(x)>0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $f(x)>f(0)=0$

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点,不合题意

3° 若 $a<-1$

(1)当 $x\in(0,+\infty)$,则 $g^{'}(x)=\mathrm{e}^x-2ax>0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

$g(0)=1+a<0, g(1)=\mathrm{e}>0$

所以存在 $m\in(0,1)$,使得 $g(m)=0$,即 $f'(m)=0$

当 $x\in(0,m), f^{'}(x)<0, f(x)$ 单调递减

当 $x\in(m,+\infty), f^{'}(x)>0, f(x)$ 单调递增

所以

当 $x\in(0,m), f(x)<f(0)=0$,

令 $h(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}, x>-1,$ 则 $h'(x)=\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}, x>-1,$

所以 $h(x)=\frac{x}{e^x}$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减，所以 $h(x)\le h\left(1\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$,

又 $\mathrm{e}^{-\frac{a}{\mathrm{e}}}-1>0$ ， $f\left(\mathrm{e}^{-\frac{a}{\mathrm{e}}}-1\right)\ge-\frac{a}{\mathrm{e}}+a\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}=0$,

所以 $f(x)$ 在 $(m,+\infty)$ 上有唯一零点

又 $(0,m)$ 没有零点,即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点

(2)当 $x\in(-1,0), g(x)=\mathrm{e}^{x}+a\left(1-x^{2}\right)$

设 $h(x)=g^{'}(x)=\mathrm{e}^{x}-2ax$

$h^{'}(x)=\mathrm{e}^{x}-2a>0$

所以 $g'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递增

$g^{'}(-1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}+2a<0, g^{'}(0)=1>0$

所以存在 $n\in(-1,0)$,使得 $g'(n)=0$

当 $x\in(-1,n), g^{'}(x)<0, g(x)$ 单调递减

当 $x\in(n,0), g^{'}(x)>0, g(x)$ 单调递增, $g(x)<g(0)=1+a<0$

又 $g(-1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}>0$

所以存在 $t\in(-1,n)$,使得 $g(t)=0$,即 $f'(t)=0$

当 $x\in(-1,t), f(x)$ 单调递增,当 $x\in(t,0), f(x)$ 单调递减,

当 $x\in\left(-1,0\right)$， $h\left(x\right)>h\left(-1\right)=-\mathrm{e}$,

又 $-1<\mathrm{e}^{a\mathrm{e}}-1<0$ ， $f\left(\mathrm{e}^{a\mathrm{e}}-1\right)<a\mathrm{e}-a\mathrm{e}=0$

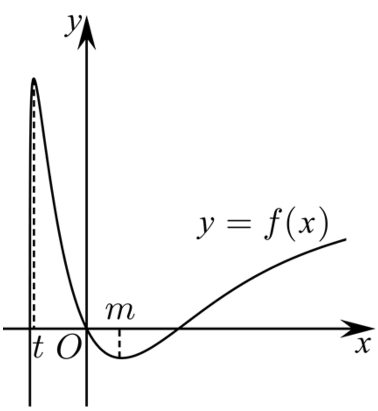
而 $f(0)=0$,所以当 $x\in(t,0), f(x)>0$

所以 $f(x)$ 在 $(-1,t)$ 上有唯一零点, $(t,0)$ 上无零点

即 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上有唯一零点

所以 $a<-1$,符合题意

所以若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0),(0,+\infty)$ 各恰有一个零点,求 a 的取值范围为 $(-\infty,-1)$



【点睛】

方法点睛：本题的关键是对 a 的范围进行合理分类，否定和肯定并用，否定只需要说明一边不满足即可，肯定要两方面都说明.

（二）选考题，共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos 2t \\ y=2\sin t \end{cases}$，（$t$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+m=0$.

（1）写出 l 的直角坐标方程；

（2）若 l 与 C 有公共点，求 m 的取值范围.

【答案】（1）$\sqrt{3}x+y+2m=0$

（2）$\left[-\dfrac{19}{12},\dfrac{5}{2}\right]$

【解析】

【分析】（1）根据极坐标与直角坐标的互化公式处理即可；

（2）方法一：联立 l 与 C 的方程，采用换元法处理，根据新设 a 的取值范围求解 m 的范围即可.

【小问 1 详解】

因为 l：$\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)+m=0$，所以 $\dfrac{1}{2}\rho\cdot\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho\cdot\cos\theta+m=0$，

又因为 $\rho\cdot\sin\theta=y,\rho\cdot\cos\theta=x$，所以化简为 $\dfrac{1}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+m=0$，

整理得 l 的直角坐标方程：$\sqrt{3}x+y+2m=0$

【小问 2 详解】

[方法一]：**【最优解】参数方程**

联立 l 与 C 的方程，即将 $x=\sqrt{3}\cos 2t$，$y=2\sin t$ 代入 $\sqrt{3}x+y+2m=0$ 中，

可得 $3\cos 2t+2\sin t+2m=0\Rightarrow 3(1-2\sin^2 t)+2\sin t+2m=0$，

化简为 $-6\sin^2 t+2\sin t+3+2m=0$，

要使 l 与 C 有公共点，则 $2m=6\sin^2 t-2\sin t-3$ 有解，

令 $\sin t=a$，则 $a\in[-1,1]$，令 $f(a)=6a^2-2a-3$，$(-1\leqslant a\leqslant 1)$，

对称轴为 $a=\frac{1}{6}$，开口向上，

$\therefore f(a)_{max}=f(-1)=6+2-3=5$，

$f(a)_{\min}=f(\frac{1}{6})=\frac{1}{6}-\frac{2}{6}-3=-\frac{19}{6}$，

$\therefore -\frac{19}{6}\le 2m\le 5$，即 m 的取值范围为 $\left[-\frac{19}{12},\frac{5}{2}\right]$.

[方法二]：直角坐标方程

由曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos 2t\\ y=2\sin t\end{cases}$，$t$ 为参数，消去参数 t，可得 $y^2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2$，

联立 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y+2m=0\\ y^2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+2\end{cases}$，得 $3y^2-2y-4m-6=0(-2\le y\le 2)$，即 $4m=3y^2-2y-6=3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{19}{3}$，

即有 $-\frac{19}{3}\le 4m\le 10$，即 $-\frac{19}{12}\le m\le\frac{5}{2}$，$\therefore m$ 的取值范围是 $\left[-\frac{19}{12},\frac{5}{2}\right]$.

【整体点评】方法一：利用参数方程以及换元，转化为两个函数的图象有交点，是该题的最优解；

方法二：通过消参转化为直线与抛物线的位置关系，再转化为二次函数在闭区间上的值域，与方法一本质上差不多，但容易忽视 y 的范围限制而出错.

[选修 4-5：不等式选讲]

23. 已知 a，b，c 都是正数，且 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$，证明：

（1）$abc\le\frac{1}{9}$；

（2）$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{1}{2\sqrt{abc}}$；

【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用三元均值不等式即可证明；

（2）利用基本不等式及不等式的性质证明即可.

【小问 1 详解】

证明：因为$a>0$，$b>0$，$c>0$，则$a^{\frac{3}{2}}>0$，$b^{\frac{3}{2}}>0$，$c^{\frac{3}{2}}>0$，

所以$\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{3}\geq\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}}$，

即$\left(abc\right)^{\frac{1}{2}}\leq\dfrac{1}{3}$，所以$abc\leq\dfrac{1}{9}$，当且仅当$a^{\frac{3}{2}}=b^{\frac{3}{2}}=c^{\frac{3}{2}}$，即$a=b=c=\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$时取等号.

【小问 2 详解】

证明：因为$a>0$，$b>0$，$c>0$，

所以$b+c\geq2\sqrt{bc}$，$a+c\geq2\sqrt{ac}$，$a+b\geq2\sqrt{ab}$，

所以$\dfrac{a}{b+c}\leq\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}=\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，$\dfrac{b}{a+c}\leq\dfrac{b}{2\sqrt{ac}}=\dfrac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$，$\dfrac{c}{a+b}\leq\dfrac{c}{2\sqrt{ab}}=\dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}$

$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\leq\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\dfrac{b^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}+\dfrac{c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{abc}}=\dfrac{1}{2\sqrt{abc}}$

当且仅当$a=b=c$时取等号.