2004年北京高考文科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。第Ⅰ卷1至2页。第Ⅱ卷3至9页。共150分。考试时间120分钟。

第Ⅰ卷（选择题　共40分）

注意事项：

1. 答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，不能答在试题卷上。
3. 考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

一．选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）设 $M=\{x|-2\le x\le 2\}$，$N=\{x|x<1\}$，则 $M\cap N$ 等于

A. $\{x|1<x<2\}$　B. $\{x|-2<x<1\}$　C. $\{x|1<x\le 2\}$　D. $\{x|-2\le x<1\}$

（2）满足条件 $|z|=|3+4i|$ 的复数 z 在复平面上对应点的轨迹是

A. 一条直线　B. 两条直线　C. 圆　D. 椭圆

（3）设m、n是两条不同的直线，α,β,γ 是三个不同的平面，给出下列四个命题：

①若 $m\perp\alpha$，$n//\alpha$，则 $m\perp n$　②若 $\alpha//\beta$，$\beta//\gamma$，$m\perp\alpha$，则 $m\perp\gamma$

③若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$　④若 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha//\beta$

其中正确命题的序号是

A. ①和②　B. ②和③　C. ③和④　D. ①和④

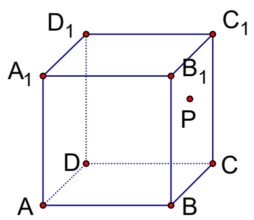
（4）已知a、b、c满足 $c<b<a$，且 $ac<0$，那么下列选项中一定成立的是

A. $ab>ac$　B. $c(b-a)<0$　C. $cb^2<ab^2$　D. $ac(a-c)>0$

（5）从长度分别为1，2，3，4的四条线段中，任取三条的不同取法共有n种，在这些取法中，以取出的三条线段为边可组成的三角形的个数为m，则 $\frac{m}{n}$ 等于

A. 0　B. $\frac{1}{4}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{3}{4}$

（6）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P是侧面 BB_1C_1C 内一动点，若P到直线BC与直线 C_1D_1 的距离相等，则动点P的轨迹所在的曲线是



A 直线　B 圆　C 双曲线　D 抛物线

（7）函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间［1，2］上存在反函数的充分必要条件是

A. $a\in(-\infty,1]$　　B. $a\in[2,+\infty)$　　C. $a\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$　　D. $a\in[1,2]$

（8）函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\in P\\-x,x\in M\end{cases}$，其中 P、M 为实数集 R 的两个非空子集，又规定 $f(P)=\{y|y=f(x),x\in P\}$，$f(M)=\{y|y=f(x),x\in M\}$，给出下列四个判断：其中正确的有：

①若 $P\cap M=\varnothing$，则 $f(P)\cap f(M)=\varnothing$　　②若 $P\cap M\neq\varnothing$，则 $f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$

③若 $P\cup M=R$，则 $f(P)\cup f(M)=R$　　④若 $P\cup M\neq R$，则 $f(P)\cup f(M)\neq R$

A. 3个　　B. 2个　　C. 1个　　D. 0个

二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。把答案填在题中的横线上。

（9）函数 $f(x)=\sin x\cos x$ 的最小正周期是______________

（10）方程 $\lg(x^2+2)=\lg x+\lg 3$ 的解是______________

（11）圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 的圆心坐标是______________，如果直线 $x+y+a=0$ 与该圆有公共点，那么实数 a 的取值范围是______________

（12）某地球仪上北纬 30° 纬线的长度为 $12\pi\ cm$，该地球仪的半径是_______cm，表面积是______cm²

（13）在函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中，若 a，b，c 成等比数列且 $f(0)=-4$，则 $f(x)$ 有最_______值（填“大”或“小”），且该值为______________

（14）定义“等和数列”：在一个数列中，如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数，那么这个数列叫做等和数列，这个常数叫做该数列的公和。　　已知数列 $\{a_n\}$ 是等和数列，且 $a_1=2$，公和为5，那么 a_{18} 的值为______________，且这个数列的前21项和 S_{21} 的值为______________

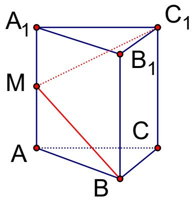
三. 解答题：本大题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

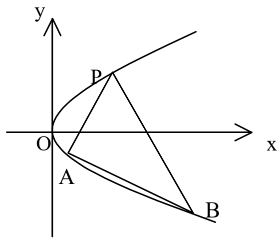
（15）（本小题满分14分）

在 ΔABC 中，$\sin A+\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$AC=2$，$AB=3$，求 tgA 的值和 ΔABC 的面积

（16）（本小题满分14分）如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，AB＝2，$AA_1=2$，由顶点 B 沿棱柱侧面经过棱 AA_1 到顶点 C_1 的最短路线与 AA_1 的交点记为 M，求：　（I）三棱柱的侧面展开图的对角线长

（II）该最短路线的长及 $\dfrac{A_1M}{AM}$ 的值　　（III）平面 C_1MB 与平面 ABC 所成二面角（锐角）的大小





（17）（本小题满分 14 分）

如图，抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在坐标原点，点 P（1，2），A（x_1, y_1），B（x_2, y_2）均在抛物线上。（I）写出该抛物线的方程及其准线方程

（II）当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时，求 $y_1 + y_2$ 的值及直线 AB 的斜率

（18）（本小题满分 14 分）

函数 $f(x)$ 定义在［0，1］上，满足 $f(x) = 2f(\frac{x}{2})$ 且 $f(1) = 1$，在每个区间 $(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}]$（$i = 1$，2……）上，$y = f(x)$ 的图象都是平行于 x 轴的直线的一部分。

（I）求 $f(0)$ 及 $f(\frac{1}{2})$，$f(\frac{1}{4})$ 的值，并归纳出 $f(\frac{1}{2^i})(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ 的表达式

（II）设直线 $x = \frac{1}{2^i}$，$x = \frac{1}{2^{i-1}}$，x 轴及 $y = f(x)$ 的图象围成的矩形的面积为 a_i（$i = 1$，2……），求 a_1, a_2 及 $\lim\limits_{n \to \infty}(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n)$ 的值

（19）（本小题满分 12 分）

某段城铁线路上依次有 A、B、C 三站，AB=15km，BC=3km，在列车运行时刻表上，规定列车 8 时整从 A 站发车，8 时 07 分到达 B 站并停车 1 分钟，8 时 12 分到达 C 站，在实际运行中，假设列车从 A 站正点发车，在 B 站停留 1 分钟，并在行驶时以同一速度 vkm/h 匀速行驶，列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差。

（I）分别写出列车在 B、C 两站的运行误差

（II）若要求列车在 B，C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟，求 v 的取值范围

（20）（本小题满分 12 分）

给定有限个正数满足条件 T：每个数都不大于 50 且总和 L＝1275。现将这些数按下列要求进行分组，每组数之和不大于 150 且分组的步骤是：

首先，从这些数中选择这样一些数构成第一组，使得 150 与这组数之和的差 r_1 与所有可能的其他选择相比是最小的，r_1 称为第一组余差； 然后，在去掉已选入第一组的数后，对余下的数按第一组的选择方式构成第二组，这时的余差为 r_2；如此继续构成第三组（余差为 r_3）、第四组（余差为 r_4）、……，直至第 N 组（余差为 r_N）把这些数全部分完为止。

（I）判断 $r_1, r_2, \cdots, r_N$ 的大小关系，并指出除第 N 组外的每组至少含有几个数

（II）当构成第 n（n<N）组后，指出余下的每个数与r_n的大小关系，并证明$r_{n-1} > \dfrac{150n-L}{n-1}$

（III）对任何满足条件 T 的有限个正数，证明：$N \le 11$

2004年普通高等学校招生北京卷文史类数学试题

参考答案

一．选择题：本大题主要考查基本知识和基本运算。每小题 5 分，满分 40 分。1-6:DCAABDCB

二．填空题：本大题主要考查基本知识和基本运算。每小题 5 分，满分 30 分。

（9）π（10）$x_1 = 1, x_2 = 2$（11）（0，-1），$1-\sqrt{2} \le a \le 1+\sqrt{2}$

（12）$4\sqrt{3}$　　192π　　（13）大　　-3　　（14）3　　52

三．解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（15）本小题主要考查三角恒等变形、三角形面积公式等基本知识，考查运算能力。满分 14 分。

解法一：

$$\because \sin A + \cos A = \sqrt{2}\cos(A - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \cos(A - 45^\circ) = \frac{1}{2} \quad \text{又} 0^\circ < A < 180^\circ$$

$$\therefore A - 45^\circ = 60^\circ, A = 105^\circ \therefore tgA = tg(45^\circ + 60^\circ) = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$$

$$\sin A = \sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \times AB \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{3}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$$

解法二：$\because \sin A + \cos A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（1）

$$\therefore (\sin A + \cos A)^2 = \frac{1}{2} \therefore 2\sin A \cos A = -\frac{1}{2} \because 0^\circ < A < 180^\circ, \therefore \sin A > 0, \cos A < 0$$

$\because (\sin A - \cos A)^2 = 1 - 2\sin A\cos A = \dfrac{3}{2}$　　$\therefore \sin A - \cos A = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　（2）

（1）+（2）得：$\sin A = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　　（1）－（2）得：$\cos A = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$$\therefore tgA = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \times \frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = -2-\sqrt{3}$$

（以下同解法一）

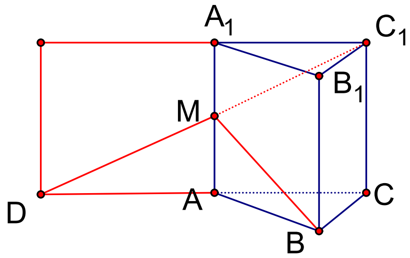
（16）本小题主要考查直线与平面的位置关系、棱柱等基本知识，考查空间想象能力、逻辑思维能力和运算能力。满分 14 分。

解：（I）正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧面展开图是长为 6，宽为 2 的矩形，其对角线长为 $\sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$

（II）如图，将侧面 AA_1B_1B 绕棱 AA_1 旋转 120° 使其与侧面 AA_1C_1C 在同一平面上，点 B 运动到点 D

的位置，连接 DC_1 交 AA_1 于 M，则 DC_1 就是由顶点 B 沿棱柱侧面经过棱 AA_1 到顶点 C_1 的最短路线，其长为

$\sqrt{DC^2+CC_1{}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ ∵ $\Delta DMA\cong\Delta C_1MA_1$，∴ $AM=A_1M$ 故 $\dfrac{A_1M}{AM}=1$

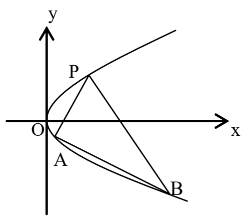


（III）连接 DB，C_1B，则 DB 就是平面 C_1MB 与平面 ABC 的交线

在 ΔDCB 中 ∵ $\angle DBC=\angle CBA+\angle ABD=60^\circ+30^\circ=90^\circ$ ∴ $CB\perp DB$

又 $C_1C\perp$平面CBD 由三垂线定理得 $C_1B\perp DB$ ∴ $\angle C_1BC$ 就是平面 C_1MB 与平面 ABC 所成二面角的平面角（锐角）∵侧面 C_1B_1BC 是正方形 ∴ $\angle C_1BC=45^\circ$

故平面 C_1MB 与平面 ABC 所成的二面角（锐角）为 45°



（17）本小题主要考查直线、抛物线等基本知识，考查运用解析几何的方法分析问题和解决问题的能力，满分 14 分。

解：（I）由已知条件，可设抛物线的方程为 $y^2=2px$

∵点 P（1，2）在抛物线上∴ $2^2=2p\times1$，得 $p=2$ 故所求抛物线的方程是 $y^2=4x$

准线方程是 $x=-1$

（II）设直线 PA 的斜率为 k_{PA}，直线 PB 的斜率为 k_{PB} 则 $k_{PA}=\dfrac{y_1-2}{x_1-2}(x_1\neq1)$，$k_{PB}=\dfrac{y_2-2}{x_2-1}(x_2\neq1)$

∵PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补∴ $k_{PA}=-k_{PB}$ 由 A（x_1,y_1），B（x_2,y_2）在抛物线上，得

$y_1{}^2=4x_1$（1）；$y_2{}^2=4x_2$ （2） ∴ $\dfrac{y_1-2}{\frac{1}{4}y_1{}^2-1}=-\dfrac{y_2-2}{\frac{1}{4}y_2{}^2-1}$ ∴ $y_1+2=-(y_2+2)$ ∴ $y_1+y_2=-4$

由（1）－（2）得直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=-\dfrac{4}{4}=-1(x_1\neq x_2)$

（18）本小题主要考查函数、数列等基本知识，考查分析问题和解决问题的能力。满分 14 分。

解：（I）由 $f(0)=2f(0)$，得 $f(0)=0$ 由 $f(1)=2f(\frac{1}{2})$ 及 $f(1)=1$，得 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}f(1)=\frac{1}{2}$

同理，$f(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$　　归纳得 $f(\frac{1}{2^i})=\frac{1}{2^i}(i=1,2,\cdots\cdots)$

（II）当 $\frac{1}{2^i}<x\le\frac{1}{2^{i-1}}$ 时，$f(x)=\frac{1}{2^{i-1}}$　$a_1=\frac{1}{2}$　$a_2=\frac{1}{8}$ $a_i=\frac{1}{2^{i-1}}(\frac{1}{2^{i-1}}-\frac{1}{2^i})=\frac{1}{2^{2i-1}}(i=1,2\cdots\cdots)$

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$

（19）本小题主要考查解不等式等基本知识，考查应用数学知识分析问题和解决问题的能力。满分 12 分。

解：（I）列车在 B，C 两站的运行误差（单位：分钟）分别是　$|\frac{300}{v}-7|$ 和 $|\frac{480}{v}-11|$

（II）由于列车在 B，C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟，所以 $|\frac{300}{v}-7|+|\frac{480}{v}-11|\le 2$　　　（*）

当 $0<v\le\frac{300}{7}$ 时，（*）式变形为 $\frac{300}{v}-7+\frac{480}{v}-11\le 2$　　解得 $39\le v\le\frac{300}{7}$

当 $\frac{300}{7}<v\le\frac{480}{11}$ 时，（*）式变形为 $7-\frac{300}{v}+\frac{480}{v}-11\le 2$　　解得 $\frac{300}{7}<v\le\frac{480}{11}$

当 $v>\frac{480}{11}$ 时，（*）式变形为 $7-\frac{300}{v}+11-\frac{480}{v}\le 2$　　解得 $\frac{480}{11}<v\le\frac{195}{4}$

综上所述，v 的取值范围是 $[39，\frac{195}{4}]$

（20）　解：（I）$r_1\le r_2\le\cdots\le r_N$。除第 N 组外的每组至少含有 $\frac{150}{50}=3$ 个数

（II）当第 n 组形成后，因为 $n<N$，所以还有数没分完，这时余下的每个数必大于余差 r_n，余下数之和也大于第 n 组的余差 r_n，即　$L-[(150-r_1)+(150-r_2)+\cdots+(150-r_n)]>r_n$

由此可得 $r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}>150n-L$　因为 $(n-1)r_{n-1}\ge r_1+r_2+\cdots+r_{n-1}$，所以 $r_{n-1}>\frac{150n-L}{n-1}$

（III）用反证法证明结论，假设 $N>11$，即第 11 组形成后，还有数没分完，由（I）和（II）可知，余下的每个数都大于第 11 组的余差 r_{11}，且 $r_{11}\ge r_{10}$　故余下的每个数 $>r_{11}\ge r_{10}>\frac{150\times 11-1275}{10}=37.5$

（*）因为第 11 组数中至少含有 3 个数，所以第 11 组数之和大于 $37.5\times 3=112.5$，　此时第 11 组的余差 $r_{11}=150-\text{第11组数之和}<150-112.5=37.5$　这与（*）式中 $r_{11}>37.5$ 矛盾，所以 $N\le 11$