

1997年北京高考理科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷（选择题共 65 分）

一、选择题：本大题共 15 小题；第 (1) — (10) 题每小题 4 分，第 (11) — (15) 题每小题 5 分，共 65 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

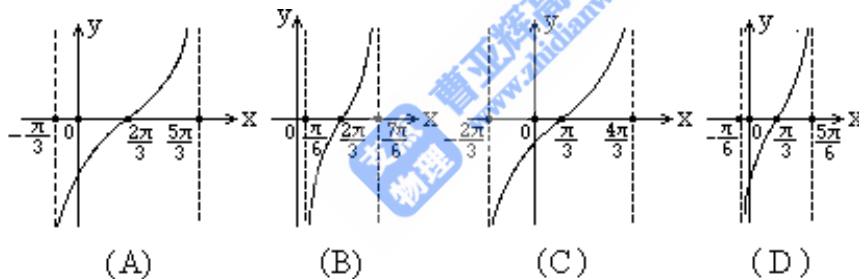
1. 设集合 $M = \{x \mid 0 \leq x < 2\}$ ，集合 $N = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$ ，集合 $M \cap N =$ ()

- (A) $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x \mid 0 \leq x < 2\}$
 (C) $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ (D) $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$

2. 如果直线 $ax + 2y + 2 = 0$ 与直线 $3x - y - 2 = 0$ 平行，那么系数 $a =$ ()

- (A) -3 (B) -6 (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

3. 函数 $y = \text{tg}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi)$ 在一个周期内的图像是 ()



4. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的三个侧面与底面全等，且 $AB=AC=\sqrt{3}$ ， $BC=2$ ，则以 BC 为棱，以面 BCD 与面 BCA 为面的二面角的大小是 ()

- (A) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\arccos \frac{1}{3}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

5. 函数 $y = \sin(\frac{\pi}{3} - 2x) + \cos 2x$ 的最小正周期是 ()

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

6. 满足 $\arccos(1-x) \geq \arccos x$ 的 x 的取值范围是 ()

- (A) $[-1, -\frac{1}{2}]$ (B) $[-\frac{1}{2}, 0]$ (C) $[0, \frac{1}{2}]$ (D) $[\frac{1}{2}, 1]$

7. 将 $y=2^x$ 的图像 ()

- (A) 先向左平行移动 1 个单位 (B) 先向右平行移动 1 个单位
 (C) 先向上平行移动 1 个单位 (D) 先向下平行移动 1 个单位

再作关于直线 $y=x$ 对称的图像, 可得到函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图像.

8. 长方体一个顶点上三条棱的长分别是 3, 4, 5, 且它的八个顶点都在同一个球面上, 这个球的表面积是 ()

- (A) $20\sqrt{2}\pi$ (B) $25\sqrt{2}\pi$ (C) 50π (D) 200π

9. 曲线的参数方程是 $\begin{cases} x=1-\frac{1}{t} \\ y=1-t^2 \end{cases}$ (t 是参数, $t \neq 0$), 它的普通方程是 ()

- (A) $(x-1)^2(y-1)=1$ (B) $y=\frac{x(x-2)}{(1-x)^2}$
 (C) $y=\frac{1}{(1-x)^2}-1$ (D) $y=\frac{x}{1-x^2}+1$

10. 函数 $y=\cos^2x-3\cos x+2$ 的最小值为 ()

- (A) 2 (B) 0 (C) $-\frac{1}{4}$ (D) 6

11. 椭圆 C 与椭圆 $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 关于直线 $x+y=0$ 对称, 椭圆 C 的方程是 ()

- (A) $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ (B) $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$
 (C) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$ (D) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

12. 圆台上、下底面积分别为 π 、 4π , 侧面积为 6π , 这个圆台的体积是 ()

- (A) $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ (B) $2\sqrt{3}\pi$ (C) $\frac{7\sqrt{3}\pi}{6}$ (D) $\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$

13. 定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数 $f(x)$ 为增函数; 偶函数 $g(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像重合, 设 $a > b > 0$, 给出下列不等式:

- ① $f(b) - f(-a) > g(a) - g(-b)$;
 ② $f(b) - f(-a) < g(a) - g(-b)$;
 ③ $f(a) - f(-b) > g(b) - g(-a)$;

其中正确的命题的序号是_____ (注:把你认为正确的命题的序号都填上)

三. 解答题:本大题共 6 小题;共 69 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

20. (本小题满分 10 分)

已知复数 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. 复数 $\overline{z\omega}$, $z^2\omega^3$ 在复数平面上所对应的点分

别为 P, Q . 证明 $\triangle OPQ$ 是等腰直角三角形 (其中 O 为原点).

21. (本小题满分 11 分)

已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是由正数组成的等比数列, 公比分别为 p, q , 其中 $p > q$, 且

$p \neq 1, q \neq 1$. 设 $c_n = a_n + b_n, S_n$ 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n-1}}$.

22. (本小题满分 12 分)

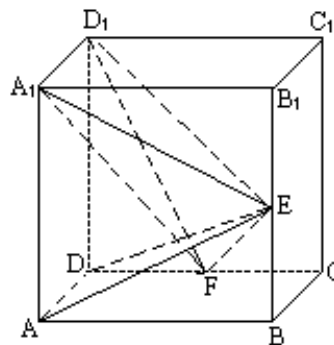
甲、乙两地相距 S 千米, 汽车从甲地匀速行驶到乙地, 速度不得超过 c 千米/时. 已知汽车每小时的运输成本 (以元为单位) 由可变部分和固定部分组成: 可变部分与速度 v (千米/时) 的平方成正比、比例系数为 b ; 固定部分为 a 元.

I. 把全程运输成本 y (元) 表示为速度 v (千米/时) 的函数, 并指出这个函数的定义域;

II. 为了使全程运输成本最小, 汽车应以多大速度行驶?

23. (本小题满分 12 分)

如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是 BB_1, CD 的中点.



I. 证明 $AD \perp D_1F$;

II. 求 AE 与 D_1F 所成的角;

III. 证明面 $AED \perp$ 面 A_1FD_1 ;

IV. 设 $AA_1=2$, 求三棱锥 $F-A_1ED_1$ 的体积 $V_{F-A_1ED_1}$

24. (本小题满分 12 分)

设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$, 方程 $f(x) - x = 0$ 的两个根 x_1, x_2 满足 $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$.

I. 当 $x \in (0, x_1)$ 时, 证明 $x < f(x) < x_1$;

11. 设函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=x_0$ 对称, 证明 $x_0 < \frac{x_1}{2}$.

(25) (本小题满分 12 分)

设圆满足: ①截 y 轴所得弦长为 2; ②被 x 轴分成两段圆弧, 其弧长的比为 3:1, 在满足条件①、②的所有圆中, 求圆心到直线 $l: x-2y=0$ 的距离最小的圆的方程.

1997 年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题(理工农医类)参考解答及评分标准

一. 选择题: 本题考查基本知识和基本运算.

1. B 2. B 3. A 4. C 5. B 6. D 7. D 8. C 9. B 10. B
11. A 12. D 13. C 14. C 15. D

二. 填空题: 本题考查基本知识和基本运算.

16. 4 17. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 18. $2-\sqrt{3}$ 19. ①, ④

注: 第(19)题多填、漏填和错填均给 0 分.

三. 解答题

20. 本小题主要考查复数的基本概念、复数的运算以及复数的几何意义等基础知识, 考查运算能力和逻辑推理能力.

解法一:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

于是

$$z\omega = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12},$$

$$\overline{z\omega} = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z^2\omega^3 = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \times \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$$

因为 OP 与 OQ 的夹角为 $\frac{5\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$, 所以 $OP \perp OQ$.

因为 $|OP| = |\overline{z\omega}| = 1, |OQ| = |z^2\omega^3| = 1$, 所以 $|OP| = |OQ|$

由此知 $\triangle OPQ$ 有两边相等且其夹角为直角, 故 $\triangle OPQ$ 为等腰直角三角形.

解法二:

因为 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $z^3 = -i$.

因为 $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, 所以 $\omega^4 = -1$

于是 $\frac{z^2\omega^3}{z\omega} = \frac{z^2\omega^3}{z\omega} \cdot \frac{z\omega}{z\omega} = \frac{z^3\omega^4}{|z|^2|\omega|^2} = i$

由此得 $OP \perp OQ, |OP| = |OQ|$.

由此知 $\triangle OPQ$ 有两边相等且其夹角为直角, 故 $\triangle OPQ$ 为等腰直角三角形.

(21) 本小题主要考查等比数列的概念、数列极限的运算等基础知识, 考查逻辑推理能力和运算能力. 满分 11 分.

解:

$$S_n = \frac{a_1(p^n - 1)}{p - 1} + \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{a_1(q-1)(p^n - 1) + b_1(p-1)(q^n - 1)}{a_1(q-1)(p^{n-1} - 1) + b_1(p-1)(q^{n-1} - 1)}.$$

分两种情况讨论.

(I) $p > 1$.

$$\because p > q > 0, 0 < \frac{q}{p} < 1,$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n [a_1(q-1)(1 - \frac{1}{p^n}) + b_1(p-1)(\frac{q^n}{p^n} - \frac{1}{p^n})]}{p^{n-1} [a_1(q-1)(1 - \frac{1}{p^{n-1}}) + b_1(p-1)(\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}} - \frac{1}{p^{n-1}})]} \\
&= p \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(q-1)(1 - \frac{1}{p^n}) + b_1(p-1)[(\frac{q}{p})^n - \frac{1}{p^n}]}{a_1(q-1)(1 - \frac{1}{p^{n-1}}) + b_1(p-1)[(\frac{q}{p})^{n-1} - \frac{1}{p^{n-1}}]} \\
&= p \cdot \frac{a_1(q-1)}{a_1(q-1)}
\end{aligned}$$

$= p$.

(II) $p < 1$.

$\because 0 < q < p < 1$,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{S_{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(q-1)(p^n - 1) + b_1(p-1)(q^n - 1)}{a_1(q-1)(p^{n-1} - 1) + b_1(p-1)(q^{n-1} - 1)} \\
&= \frac{-a_1(q-1) - b_1(p-1)}{-a_1(q-1) - b_1(p-1)} = 1
\end{aligned}$$

(22) 本小题主要考查建立函数关系、不等式性质、最大值、最小值等基础知识，考查综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力，满分 12 分。

解：(I) 依题意知汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为 $\frac{S}{v}$ ，全程运输成本为

$$y = a \cdot \frac{S}{v} + bv^2 \cdot \frac{S}{v} = S(\frac{a}{v} + bv)$$

故所求函数及其定义域为

$$y = S(\frac{a}{v} + bv), v \in (0, c]$$

(II) 依题意知 S, a, b, v 都为正数，故有

$$S(\frac{a}{v} + bv) \geq 2S\sqrt{ab}$$

当且仅当 $\frac{a}{v} = bv$, 即 $v = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 时上式中等号成立

若 $\sqrt{\frac{a}{b}} \leq c$, 则当 $v = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 时, 全程运输成本 y 最小,

若 $\sqrt{\frac{a}{b}} > c$, 则当 $v \in (0, c]$ 时, 有

$$\begin{aligned} & S\left(\frac{a}{v} + bv\right) - S\left(\frac{a}{c} + bc\right) \\ &= S\left[\left(\frac{a}{v} - \frac{a}{c}\right) + (bv - bc)\right] \\ &= \frac{S}{vc}(c-v)(a-bcv) \end{aligned}$$

因为 $c-v \geq 0$, 且 $a > bc^2$, 故有 $a-bcv \geq a-bc^2 > 0$,

所以 $S\left(\frac{a}{v} + bv\right) \geq S\left(\frac{a}{c} + bc\right)$, 且仅当 $v=c$ 时等号成立,

也即当 $v=c$ 时, 全程运输成本 y 最小.

综上知, 为使全程运输成本 y 最小, 当 $\frac{\sqrt{ab}}{b} \leq c$ 时行驶速度应为 $v = \frac{\sqrt{ab}}{b}$; 当

$\frac{\sqrt{ab}}{b} > c$ 时行驶速度应为 $v=c$.

(23) 本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系, 考查逻辑推理能力和空间想象能力, 满分 12 分.

解: (I) $\because AC_1$ 是正方体,

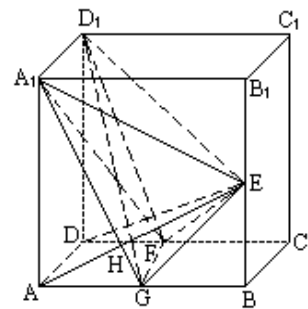
$\therefore AD \perp$ 面 DC_1 .

又 $D_1F \subset$ 面 DC_1 ,

$\therefore AD \perp D_1F$.

(II) 取 AB 中点 G , 连结 A_1G, FG . 因为 F 是 CD 的中点, 所以 GF, AD 平行且相等, 又 A_1D_1, AD 平行且相等, 所以 GF, A_1D_1 平行且相等, 故 GFD_1A_1 是平行四边形, $A_1G \parallel D_1F$.

设 A_1G 与 AE 相交于点 H , 则 $\angle AHA_1$ 是 AE 与 D_1F 所成的角, 因为 E 是 BB_1 的中点, 所以 $\text{Rt} \triangle A_1AG \cong \text{Rt} \triangle ABE$, $\angle GA_1A = \angle GAH$, 从而 $\angle AHA_1 = 90^\circ$, 即直线 AE 与 D_1F 所成角为直角.



(III) 由 (I) 知 $AD \perp D_1F$, 由 (II) 知 $AE \perp D_1F$, 又 $AD \cap AE = A$, 所以 $D_1F \perp$ 面 AED . 又因为 $D_1F \subset$ 面 A_1FD_1 , 所以面 $AED \perp$ 面 A_1FD_1 .

(IV) 连结 GE, GD_1 .

$\because FG \parallel A_1D_1, \therefore FG \parallel$ 面 A_1ED_1 ,

$$\therefore V_{F-A_1ED_1} = V_{G-A_1ED_1} = V_{D_1-A_1GE}$$

$\because AA_1 = 2$,

$$\begin{aligned} \therefore S_{\Delta A_1GE} &= S_{\text{正方形 } ABB_1A_1} - 2S_{\Delta A_1AG} - S_{\Delta GBE} = \frac{3}{2} \\ V_{F-A_1ED_1} &= V_{D_1-A_1GE} = \frac{1}{3} \times A_1D_1 \times S_{\Delta A_1GE} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{3}{2} = 1 \end{aligned}$$

(24) 本小题主要考查一元二次方程、二次函数和不等式的基础知识, 考查综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力. 满分 12 分.

证明: (I) 令 $F(x) = f(x) - x$. 因为 x_1, x_2 是方程 $f(x) - x = 0$ 的根, 所以

$$F(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

当 $x \in (0, x_1)$ 时, 由于 $x_1 < x_2$, 得 $(x - x_1)(x - x_2) > 0$, 又 $a > 0$, 得

$$F(x) = a(x - x_1)(x - x_2) > 0,$$

即 $x < f(x)$.

$$\begin{aligned} x_1 - f(x) &= x_1 - [x + F(x)] \\ &= x_1 - x + a(x_1 - x)(x - x_2) \\ &= (x_1 - x)[1 + a(x - x_2)] \end{aligned}$$

因为 $0 < x < x_1 < x_2 < \frac{1}{a}$

所以 $x_1 - x > 0, 1 + a(x - x_2) = 1 + ax - ax_2 > 1 - ax_2 > 0$.

得 $x_1 - f(x) > 0$.

由此得 $f(x) < x_1$.

(II) 依题意知

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

因为 x_1, x_2 是方程 $f(x) - x = 0$ 的根, 即 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 的根.

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b-1}{a},$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{a(x_1 + x_2) - 1}{2a} = \frac{ax_1 + ax_2 - 1}{2a}$$

因为 $ax_2 < 1$, 所以 $x_0 < \frac{ax_1}{2a} = \frac{x_1}{2}$.

(25) 本小题主要考查轨迹的思想, 求最小值的方法, 考查综合运用知识建立曲线方程的能力. 满分 12 分.

解法一: 设圆的圆心为 $P(a, b)$, 半径为 r , 则点 P 到 x 轴, y 轴的距离分别为 $|b|$, $|a|$.

由题设知圆 P 截 x 轴所得劣弧对的圆心角为 90° , 知圆 P 截 x 轴所得的弦长为 $\sqrt{2}r$, 故 $r^2 = 2b^2$,

又圆 P 截 y 轴所得的弦长为 2, 所以有

$$r^2 = a^2 + 1.$$

从而得 $2b^2 - a^2 = 1$.

又点 $P(a, b)$ 到直线 $x - 2y = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|a - 2b|}{\sqrt{5}},$$

所以 $5d^2 = |a - 2b|^2$

$$= a^2 + 4b^2 - 4ab$$

$$\geq a^2 + 4b^2 - 2(a^2 + b^2)$$

$$= 2b^2 - a^2 = 1,$$

当且仅当 $a = b$ 时上式等号成立, 此时 $5d^2 = 1$, 从而 d 取得最小值.

由此有

$$\begin{cases} a = b, \\ 2b^2 - a^2 = 1 \end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 1; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -1, \\ b = -1. \end{cases}$$

由于 $r^2 = 2b^2$ 知 $r = \sqrt{2}$.

于是, 所求圆的方程是

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2, \text{ 或 } (x+1)^2+(y+1)^2=2.$$

解法二:同解法一, 得 $d = \frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$

$$\therefore a-2b = \pm\sqrt{5}d$$

$$\text{得 } a^2 = 4b^2 \pm 4\sqrt{5}bd + 5d^2 \quad \text{①}$$

将 $a^2=2b^2-1$ 代入①式, 整理得

$$2b^2 \pm 4\sqrt{5}db + 5d^2 + 1 = 0 \quad \text{②}$$

把它看作 b 的二次方程, 由于方程有实根, 故判别式非负, 即

$$\Delta = 8(5d^2 - 1) \geq 0,$$

$$\text{得 } 5d^2 \geq 1.$$

$$\therefore 5d^2 \text{ 有最小值 } 1, \text{ 从而 } d \text{ 有最小值 } \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

将其代入②式得 $2b^2 \pm 4b + 2 = 0$. 解得 $b = \pm 1$.

将 $b = \pm 1$ 代入 $r^2 = 2b^2$, 得 $r^2 = 2$. 由 $r^2 = a^2 + 1$ 得 $a = \pm 1$.

综上 $a = \pm 1, b = \pm 1, r^2 = 2$.

由 $|a-2b|=1$ 知 a, b 同号.

于是, 所求圆的方程是

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2, \text{ 或 } (x+1)^2+(y+1)^2=2.$$