

2008年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数 学（文科）及参考答案

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,第 I 卷第 1 至第 2 页,第 II 卷第 3 至第 4 页。全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

考生注意事项:

1. 答题前,务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的座位号、姓名,并认真核对答题卡上所粘贴的条形码中“座位号、姓名、科类”与本人座位号、姓名、科类是否一致。
2. 答第 I 卷时,每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动、用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
3. 答第 II 卷时,必须用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上书写。在试题卷上作答无效。
4. 考试结束,监考员将试题卷和答题卡一并收回。

参考公式:

如果事件 A、B 互斥,那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立,那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次实验中发生的概率是 p,那么

n 次独立重复实验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (k=0,1,2,\dots,n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

第 I 卷

一. 选择题:

1. 设集合 $U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, 则 $\complement_U(A \cap B) =$ (B)

(A) $\{2,3\}$

(B) $\{1,4,5\}$

(C) $\{4,5\}$

(D) $\{1,5\}$

【解】: $\because A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\} \therefore A \cap B = \{2,3\}$

又 $\because U = \{1,2,3,4,5\} \therefore \complement_U(A \cap B) = \{1,4,5\}$ 故选 B;

2. 函数 $y = \ln(2x+1) \left(x > -\frac{1}{2}\right)$ 的反函数是 (C)

(A) $y = \frac{1}{2}e^x - 1 (x \in R)$

(B) $y = e^{2x} - 1 (x \in R)$

(C) $y = \frac{1}{2}(e^x - 1)(x \in R)$ (D) $y = e^{\frac{x}{2}} - 1(x \in R)$

【解】: \because 由 $y = \ln(2x+1)$ 反解得 $x = \frac{1}{2}(e^y - 1) \quad \therefore y = \frac{1}{2}(e^x - 1)$ 从而淘汰 (B)、(D)

又 \because 原函数定义域为 $x > -\frac{1}{2} \quad \therefore$ 反函数值域为 $y > -\frac{1}{2}$ 故选 C;

【考点】: 此题重点考察求反函数的方法, 考察原函数与反函数的定义域与值域的互换性;

【突破】: 反解得解析式, 或利用原函数与反函数的定义域与值域的互换对选项进行淘汰;

3. 设平面向量 $\vec{a} = (3, 5), \vec{b} = (-2, 1)$, 则 $\vec{a} - 2\vec{b} =$ (A)

(A) (7, 3) (B) (7, 7) (C) (1, 7) (D)

(1, 3)

【解】: $\because \vec{a} = (3, 5), \vec{b} = (-2, 1) \quad \therefore \vec{a} - 2\vec{b} = (3, 5) - 2(-2, 1) = (3 + 4, 5 - 2) = (7, 3)$

故选 C;

【考点】: 此题重点考察向量加减、数乘的坐标运算;

【突破】: 准确应用向量的坐标运算公式是解题的关键;

4. $(\tan x + \cot x)\cos^2 x =$ (D)

(A) $\tan x$ (B) $\sin x$ (C) $\cos x$ (D) $\cot x$

【解】: $\because (\tan x + \cot x)\cos^2 x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)\cos^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \cdot \cos^2 x$
 $= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ 故选 D;

【点评】: 此题重点考察各三角函数的关系;

【突破】: 熟悉三角公式, 化切为弦; 以及注意 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$;

5. 不等式的解集为 (A)

(A) (-1, 2) (B) (-1, 1) (C) (-2, 1) (D) (-2, 2)

【解】: $\because |x^2 - x| < 2 \quad \therefore -2 < x^2 - x < 2$ 即 $\begin{cases} x^2 - x + 2 > 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x \in R \\ -1 < x < 2 \end{cases}$

$\therefore x \in (-1, 2)$ 故选 A;

【点评】: 此题重点考察绝对值不等式的解法;

【突破】: 准确进行不等式的转化去掉绝对值符号为解题的关键, 可用公式法, 平方法, 特值验证淘汰法;

6. 直线 $y = 3x$ 绕原点逆时针旋转 90° , 再向右平移 1 个单位, 所得到的直线为 (A)

$$(A) y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \quad (B) y = -\frac{1}{3}x + 1$$

$$(C) y = 3x - 3 \quad (D) y = \frac{1}{3}x + 1$$

【解】：∵ 直线 $y = 3x$ 绕原点逆时针旋转 90° 的直线为 $y = -\frac{1}{3}x$ ，从而淘汰 (C)，(D)

又∵ 将 $y = -\frac{1}{3}x$ 向右平移 1 个单位得 $y = -\frac{1}{3}(x-1)$ ，即 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ 故选 A；

【点评】：此题重点考察互相垂直的直线关系，以及直线平移问题；

【突破】：熟悉互相垂直的直线斜率互为负倒数，过原点的直线无常数项；重视平移方法：“左加右减”；

7. $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C 的对边边长分别为 a, b, c ，若 $a = \frac{\sqrt{5}}{2}b, A = 2B$ ，则

$\cos B =$ (B)

$$(A) \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (B) \frac{\sqrt{5}}{4} \quad (C) \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (D) \frac{\sqrt{5}}{6}$$

【解】：∵ $\triangle ABC$ 中 $\begin{cases} a = \frac{\sqrt{5}}{2}b \\ A = 2B \end{cases} \therefore \begin{cases} \sin A = \frac{\sqrt{5}}{2}\sin B \\ \sin A = \sin 2B = 2\sin B \cos B \end{cases} \therefore \cos B = \frac{\sqrt{5}}{4}$ 故选 B；

【点评】：此题重点考察解三角形，以及二倍角公式；

【突破】：应用正弦定理进行边角互化，利用三角公式进行角的统一，达到化简的目的；在解三角形中，利用正余弦定理进行边角转化是解题的基本方法，在三角函数的化简求值中常要重视角的统一，函数的统一，降次思想的应用。

8. 设 M 是球心 O 的半径 OP 的中点，分别过 M, O 作垂直于 OP 的平面，截球面得两个圆，则这两个圆的面积比值为：(D)

$$(A) \frac{1}{4} \quad (B) \frac{1}{2} \quad (C) \frac{2}{3} \quad (D) \frac{3}{4}$$

【解】：设分别过 M, O 作垂线于 OP 的面截球得三个圆的半径为 r_1, r_2 ，球半径为 R ，

$$\text{则：} r_1^2 = R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2 = \frac{3}{4}R^2, r_2^2 = R^2$$

$$\therefore r_1^2 : r_2^2 = \frac{3}{4}R^2 : R^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore \text{这两个圆的面积比值为：} \frac{3}{4} \quad \text{故选 D}$$

【点评】：此题重点考察球中截面圆半径，球半径之间的关系；

【突破】：画图数形结合，提高空间想象能力，利用勾股定理；

9. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \cdot f(x+2) = 13$ ，若 $f(1) = 2$ ，则 $f(99) =$ (C)

- (A) 13 (B) 2 (C) $\frac{13}{2}$ (D) $\frac{2}{13}$

【解】: $\because f(x) \cdot f(x+2) = 13$ 且 $f(1) = 2 \quad \therefore f(1) = 2, f(3) = \frac{13}{f(1)} = \frac{13}{2},$

$$f(5) = \frac{13}{f(3)} = 2, f(7) = \frac{13}{f(5)} = \frac{13}{2}, f(9) = \frac{13}{f(7)} = 2, \dots,$$

$$\therefore f(2n-1) = \begin{cases} 2 & n \text{ 为奇数} \\ \frac{13}{2} & n \text{ 为偶数} \end{cases}, \therefore f(99) = f(2 \times 100 - 1) = \frac{13}{2} \quad \text{故选 C}$$

【点评】: 此题重点考察递推关系下的函数求值;

【突破】: 此类题的解决方法一般是求出函数解析式后代值, 或者得到函数的周期性求解;

10. 设直线 $l \subset$ 平面 α , 经过 α 外一点 A 与 l, α 都成 30° 角的直线有且只有: (B)

- (A) 1 条 (B) 2 条 (C) 3 条 (D) 4 条

【解】: 如图, 当 $\angle AOC = \angle ACB = 30^\circ$ 时, 直线 AC 满足条件;

又由图形的对称性, 知当 $\angle AOB = \angle ABC = 30^\circ$ 时,

直线 AB 满足条件; 故选 B

【点评】: 此题重点考察线线角, 线面角的关系, 以及空间想象能力, 图形的对称性;

【突破】: 数形结合, 利用圆锥的母线与底面所成的角不变画图, 重视空间想象能力和图形的对称性;

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为 C 的右支上一点, 且

$|PF_1| = |F_1F_2|$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积等于 (C)

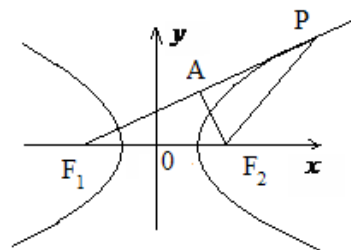
- (A) 24 (B) 36 (C) 48 (D) 96

【解 1】: \because 双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 中 $a = 3, b = 4, c = 5 \quad \therefore F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$

$$\because |PF_2| = |F_1F_2| \quad \therefore |PF_1| = 2a + |PF_2| = 6 + 10 = 16$$

$$\text{作 } PF_1 \text{ 边上的高 } AF_2, \text{ 则 } AF_1 = 8 \quad \therefore AF_2 = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

$$\therefore \triangle PF_1F_2 \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{1}{2} \times 16 \times 10 = 80 \quad \text{故选 C}$$



【解 2】: \because 双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 中 $a = 3, b = 4, c = 5 \quad \therefore F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$

$$\text{设 } P(x_0, y_0), (x_0 > 0), \text{ 则由 } |PF_2| = |F_1F_2| \text{ 得 } (x_0 - 5)^2 + y_0^2 = 10^2$$

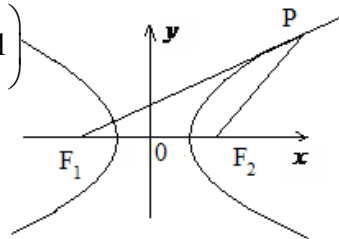
又 $\because P$ 为 C 的右支上一点 $\therefore \frac{x_0^2}{9} - \frac{y_0^2}{16} = 1 \quad \therefore y_0^2 = 16\left(\frac{x_0^2}{9} - 1\right)$

$\therefore (x_0 - 5)^2 + 16\left(\frac{x_0^2}{9} - 1\right) = 100$ 即 $25x_0^2 + 90x_0 - 819 = 0$

解得 $x_0 = \frac{21}{5}$ 或 $x_0 = -\frac{39}{5} < 0$ (舍去)

$\therefore y_0 = \sqrt{16\left(\frac{x_0^2}{9} - 1\right)} = \sqrt{16\left[\left(\frac{21}{5}\right)^2 \times \frac{1}{9} - 1\right]} = \frac{48}{5}$

$\therefore \triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_0| = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{48}{5} = 48$ 故选 **B**



【点评】：此题重点考察双曲线的第一定义，双曲线中与焦点，准线有关三角形问题；

【突破】：由题意准确画出图象，解法 1 利用数形结合，注意到三角形的特殊性；解法 2 利用待定系数法求 P 点坐标，有较大的运算量；

12. 若三棱柱的一个侧面是边长为 2 的正方形，另外两个侧面都是有一个内角为 60° 的菱形，则该棱柱的体积等于(**B**)

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$

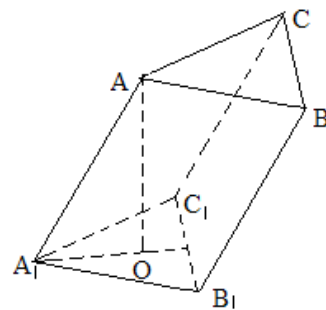
【解】：如图在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，设 $\angle AA_1B_1 = \angle AA_1C_1 = 60^\circ$ ，

由条件有 $\angle C_1A_1B_1 = 60^\circ$ ，作 $AO \perp$ 面 $A_1B_1C_1$ 于点 O ，

则 $\cos \angle AA_1O = \frac{\cos \angle AA_1B_1}{\cos \angle B_1A_1O} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \sin \angle AA_1O = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \therefore AO = AA_1 \cdot \sin \angle AA_1O = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\therefore V_{ABC-A_1B_1C_1} = S_{\triangle A_1B_1C_1} \cdot AO = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{2}$ 故选 **B**



【点评】：此题重点考察立体几何中的最小角定理和柱体体积公式，同时考察空间想象能力；

【突破】：具有较强的空间想象能力，准确地画出图形是解决此题的前提，熟悉最小角定理并能准确应用是解决此题的关键；

第 II 卷

二. 填空题：本大题共 4 个小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填在题中横线上。

13. $(1+2x)^3(1-x)^4$ 展开式中 x 的系数为 2 。

【解】： $\because (1+2x)^3(1-x)^4$ 展开式中 x 项为

$$C_3^0 1^3 (2x)^0 \cdot C_4^1 1^3 (-x)^1 + C_3^1 1^2 (2x)^1 \cdot C_4^0 1^4 (-x)^0$$

\therefore 所求系数为 $C_3^0 \cdot C_4^1 (-1) + C_3^1 \cdot 2 = -4 + 6 = 2$ 故填 **2**

【点评】： 此题重点考察二项展开式中指定项的系数，以及组合思想；

【突破】： 利用组合思想写出项，从而求出系数；

14. 已知直线 $l: x - y + 4 = 0$ 与圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ ，则 C 上各点到 l 的距离的最小

值为 $\sqrt{2}$ 。

【解】： 如图可知：过圆心作直线 $l: x - y + 4 = 0$ 的垂线，则 AD 长即为所求；

$\because C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 的圆心为 $C(2, 2)$ ，半径为 $\sqrt{2}$

$$\text{点 } C \text{ 到直线 } l: x - y + 4 = 0 \text{ 的距离为 } d = \frac{|1-1+4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$\therefore AD = CD - AB = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ 故 C 上各点到 l 的距离的最小值为 $\sqrt{2}$

【点评】： 此题重点考察圆的标准方程和点到直线的距离；

【突破】： 数形结合，使用点 C 到直线 l 的距离公式。

15. 从甲、乙等 10 名同学中挑选 4 名参加某校公益活动，要求甲、乙中至少有 1 人参加，则不同的挑选方法共有 140 种。

【解】： \because 从 10 个同学中挑选 4 名参加某项公益活动有 C_{10}^4 种不同挑选方法；

从甲、乙之外的 8 个同学中挑选 4 名参加某项公益活动有 C_8^4 种不同挑选方法；

\therefore 甲、乙中至少有 1 人参加，则不同的挑选方法共有 $C_{10}^4 - C_8^4 = 210 - 70 = 140$ 种不同挑选方法 故填 **140**；

【考点】： 此题重点考察组合的意义和组合数公式；

【突破】： 从参加“某项”切入，选中的无区别，从而为组合问题；由“至少”从反面排除易于解决；

16. 设数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + n + 1$ ，则通项 $a_n =$ $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ 。

【解】： $\because a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad \therefore a_n = a_{n-1} + (n-1) + 1, a_{n-1} = a_{n-2} + (n-2) + 1,$

$$a_{n-2} = a_{n-3} + (n-3) + 1, \dots, a_3 = a_2 + 2 + 1, a_2 = a_1 + 1 + 1, a_1 = 2 = 1 + 1$$

将以上各式相加得： $a_n = [(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1] + n + 1$

$$= \frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2} + n + 1 = \frac{(n-1)n}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \quad \text{故应填 } \frac{n(n+1)}{2} + 1;$$

【考点】 此题重点考察由数列的递推公式求数列的通项公式；

【突破】 重视递推公式的特征与解法的选择；抓住 $a_{n+1} = a_n + n + 1$ 中 a_{n+1}, a_n 系数相同是找到方法的突破口；此题可用累和法，迭代法等；

三. 解答题：本大题共 6 个小题，共 74 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

求函数 $y = 7 - 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x - 4\cos^4 x$ 的最大值与最小值。

解： $y = 7 - 4\sin x \cos x + 4\cos^2 x - 4\cos^4 x$

$$= 7 - 2\sin 2x + 4\cos^2 x(1 - \cos^2 x)$$

$$= 7 - 2\sin 2x + 4\cos^2 x \sin^2 x$$

$$= 7 - 2\sin 2x + \sin^2 2x$$

$$= (1 - \sin 2x)^2 + 6$$

由于函数 $z = (u - 1)^2 + 6$ 在 $[-1, 1]$ 中的最大值为

$$z_{\max} = (-1 - 1)^2 + 6 = 10$$

最小值为

$$z_{\min} = (1 - 1)^2 + 6 = 6$$

故当 $\sin 2x = -1$ 时 y 取得最大值 10，当 $\sin 2x = 1$ 时 y 取得最小值 6

18. (本小题满分 12 分)

设进入某商场的每一位顾客购买甲种商品的概率为 0.5，购买乙种商品的概率为 0.6，且购买甲种商品与购买乙种商品相互独立，各顾客之间购买商品也是相互独立的。

(I) 求进入商场的 1 位顾客购买甲、乙两种商品中的一种的概率；

(II) 求进入商场的 3 位顾客中至少有 2 位顾客既未购买甲种也未购买乙种商品的概率。

解： (I) 记 A 表示事件：进入商场的 1 位顾客购买甲种商品，

记 B 表示事件：进入商场的 1 位顾客购买乙种商品，

记 C 表示事件：进入商场的 1 位顾客购买甲、乙两种商品中的一种，

$$C = (A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B)$$

$$P(C) = P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B)$$

$$\begin{aligned}
&= P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) \\
&= P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \\
&= 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.6 \\
&= 0.5
\end{aligned}$$

(II) 记 A_2 表示事件：进入商场的 3 位顾客中都未选购甲种商品，也未选购买乙种商品；

D 表示事件：进入商场的 1 位顾客未选购甲种商品，也未选购买乙种商品；

E 表示事件：进入商场的 3 位顾客中至少有 2 位顾客既未选购甲种商品，也未选购买乙种商品；

$$\bar{D} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

$$P(\bar{D}) = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$$

$$P(A_2) = C_2^2 \times 0.2^2 \times 0.8 = 0.096$$

$$P(A_3) = 0.2^3 = 0.008$$

$$P(E) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0.096 + 0.008 = 0.104$$

19. (本小题满分 12 分)

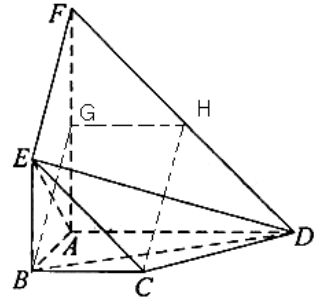
如图，平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $ABEF$ 与 $ABCD$ 都是直角梯形，

$\angle BAD = \angle FAB = 90^\circ$, $BC \parallel \frac{1}{2}AD$, $BE \parallel \frac{1}{2}AF$, G, H 分别为 FA, FD 的中点

(I) 证明：四边形 $BCHG$ 是平行四边形；

(II) C, D, F, E 四点是否共面？为什么？

(III) 设 $AB = BE$ ，证明：平面 $ADE \perp$ 平面 CDE ；



解法一：

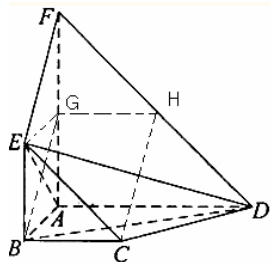
(I) 由题意知， $FG = GA, FH = HD$

$$\text{所以 } GH \parallel \frac{1}{2}AD$$

$$\text{又 } BC \parallel \frac{1}{2}AD, \text{ 故 } GH \parallel BC$$

所以四边形 $BCHG$ 是平行四边形。

(II) C, D, F, E 四点共面。理由如下：



由 $BC \parallel \frac{1}{2}AF$ ， G 是 FA 的中点知， $BE \parallel GH$ ，所以 $EF \parallel BG$

由 (I) 知 $BG \parallel CH$ ，所以 $EF \parallel CH$ ，故 EC, FH 共面。又点 D 在直线 FH 上

所以 C, D, F, E 四点共面。

(III) 连结 EC ，由 $AB = BE$ ， $BE \parallel AG$ 及 $\angle BAG = 90^\circ$ 知 $ABEG$ 是正方形

故 $BG \perp EA$ 。由题设知 FA, FD, AB 两两垂直，故 $AD \perp$ 平面 $FABE$ ，

因此 EA 是 ED 在平面 $FABE$ 内的射影，根据三垂线定理， $BG \perp ED$

又 $ED \cap EA = E$ ，所以 $BG \perp$ 平面 ADE

由 (I) 知 $CH \parallel BG$ ，所以 $CH \perp$ 平面 ADE 。

由 (II) 知 $F \in$ 平面 CDE ，故 $CH \subset$ 平面 CDE ，得平面 $ADE \perp$ 平面 CDE

解法二：

由平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AF \perp AB$ ，得 $AF \perp$ 平面 $ABCD$ ，以 A 为坐标原点，

射线 AB 为 x 轴正半轴，建立如图所示的直角坐标系 $A-xyz$

(I) 设 $AB = a, BC = b, BE = c$ ，则由题设得

$$A(0,0,0), B(a,0,0), C(a,b,0), D(0,2b,0), E(a,0,c), G(0,0,c), H(0,b,c)$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{HG} = (0,b,0), \overrightarrow{BC} = (0,b,0)$$

$$\text{于是 } \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{BC}$$

又点 G 不在直线 BC 上

所以四边形 $BCHG$ 是平行四边形。

(II) C, D, F, E 四点共面。理由如下：

由题设知 $F(0,0,2c)$ ，所以

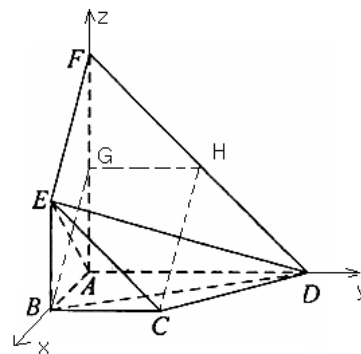
$$\overrightarrow{EF} = (-a,0,c), \overrightarrow{CH} = (-a,0,c), \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CH}$$

又 $C \notin EF, H \in FD$ ，故 C, D, E, F 四点共面。

(III) 由 $AB = BE$ 得，所以 $\overrightarrow{CH} = (-a,0,a), \overrightarrow{AE} = (a,0,a)$

$$\text{又 } \overrightarrow{AD} = (0,2b,0), \text{ 因此 } \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

即 $CH \perp AE, CH \perp AD$



又 $AD \cap AE = A$ ，所以 $CH \perp$ 平面 ADE
故由 $CH \subset$ 平面 $CDFE$ ，得平面 $ADE \perp$ 平面 CDE

20. (本小题满分 12 分)

设 $x=1$ 和 $x=2$ 是函数 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx + 1$ 的两个极值点。

(I) 求 a 和 b 的值;

(II) 求 $f(x)$ 的单调区间

解: (I) 因为 $f'(x) = 5x^4 + 3ax^2 + b$

由假设知: $f'(1) = 5 + 3a + b = 0$

$$f'(2) = 2^4 \times 5 + 2^2 \times 3a + b = 0$$

解得 $a = \frac{25}{3}, b = 20$

(II) 由 (I) 知

$$f'(x) = 5x^4 + 3ax^2 + b = 5(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 5(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)$$

当 $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$

当 $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$ 时, $f'(x) < 0$

因此 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty, -2), (-1, 1), (2, +\infty)$

$f(x)$ 的单调减区间是 $(-2, -1), (1, 2)$

21. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2a_n - 2^n$,

(I) 求 a_1, a_4

(II) 证明: $\{a_{n+1} - 2a^n\}$ 是等比数列;

(III) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式

解: (I) 因为 $a_1 = S_1, 2a_1 = S_1 + 2$,

所以 $a_1 = 2, S_1 = 2$

由 $2a_n = S_n + 2^n$ 知

$$2a_{n+1} = S_{n+1} + 2^{n+1} = a_{n+1} + S_n + 2^{n+1}$$

$$\text{得 } a_n = S_n + 2^{n+1} \quad \text{①}$$

$$\text{所以 } a_2 = S_1 + 2^2 = 2 + 2^2 = 6, S_2 = 8$$

$$a_3 = S_2 + 2^3 = 8 + 2^3 = 16, S_2 = 24$$

$$a_4 = S_3 + 2^4 = 40$$

(II) 由题设和①式知

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (S_n + 2^{n+1}) - (S_n + 2^n) \\ &= 2^{n+1} - 2^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

所以是首项为 2，公比为 2 的等比数列。

$$\begin{aligned} \text{(III) } a_n &= (a_n - 2a_{n-1}) + 2(a_{n-1} - 2a_{n-2}) + \cdots + 2^{n-2}(a_2 - 2a_1) + 2^{n-1}a_1 \\ &= (n+1) \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

22. (本小题满分 14 分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，点 F_2 到右准

线为 l 的距离为 $\sqrt{2}$

(I) 求 a, b 的值；

(II) 设 M, N 是 l 上的两个动点， $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0$ ，

证明：当 $|MN|$ 取最小值时， $\overrightarrow{F_1F_2} + \overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N} = \vec{0}$

解： 因为 $e = \frac{a}{c}$ ， F_2 到 l 的距离 $d = \frac{a}{c} - c$ ，所以由题设得

$$\begin{cases} \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a}{c} - c = \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{解得 } c = \sqrt{2}, a = 2$$

$$\text{由 } b^2 = a^2 - c^2 = 2, \text{ 得 } b = \sqrt{2}$$

(II) 由 $c = \sqrt{2}, a = 2$ 得 $F_1(-\sqrt{2}, 0), F_2(\sqrt{2}, 0)$, l 的方程为 $x = 2\sqrt{2}$

故可设 $M(2\sqrt{2}, y_1), N(2\sqrt{2}, y_2)$

由知 $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2N} = 0$ 知

$$(2\sqrt{2} + \sqrt{2}, y_1) \cdot (2\sqrt{2} - \sqrt{2}, y_2) = 0$$

得 $y_1 y_2 = -6$, 所以 $y_1 y_2 \neq 0, y_2 = -\frac{6}{y_1}$

$$|MN| = |y_1 - y_2| = \left| y_1 + \frac{6}{y_1} \right| = |y_1| + \frac{1}{|y_1|} \geq 2\sqrt{6}$$

当且仅当 $y_1 = \pm\sqrt{6}$ 时, 上式取等号, 此时 $y_2 = -y_1$

$$\begin{aligned} \text{所以, } \overrightarrow{F_1F_2} + \overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N} &= (-2\sqrt{2}, 0) + (\sqrt{2}, y_1) + (\sqrt{2}, y_2) \\ &= (0, y_1 + y_2) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$