

2016年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

数学（理工类）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1.集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ ， Z 为整数集，则 $A \cap Z$ 中元素的个数是

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

【答案】C

【解析】

试题分析：由题意， $A \cap Z = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，故其中的元素个数为 5，选 C.

考点：集合中交集的运算.

【名师点睛】集合的概念及运算一直是高考的热点，几乎是每年必考内容，属于容易题.一般是结合不等式，函数的定义域值域考查，解题的关键是结合韦恩图或数轴解答.

2. 设 i 为虚数单位，则 $(x+i)^6$ 的展开式中含 x^4 的项为

- (A) $-15x^4$ (B) $15x^4$ (C) $-20ix^4$ (D) $20ix^4$

【答案】A

【解析】

试题分析：二项式 $(x+i)^6$ 展开的通项 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} i^r$ ，令 $6-r=4$ ，得 $r=2$ ，则展开式中含 x^4 的项为 $C_6^2 x^4 i^2 = -15x^4$ ，故选 A.

考点：二项展开式，复数的运算.

【名师点睛】本题考查二项式定理及复数的运算，复数的概念及运算也是高考的热点，几乎是每年必考内容，属于容易题.一般来说，掌握复数的基本概念及四则运算即可.二项式 $(x+i)^6$ 的展开式可以改为 $(i+x)^6$ ，则其通项为 $C_6^r i^{6-r} x^r$ ，即含 x^4 的项为 $C_6^4 i^{6-4} x^4 = -15x^4$.

3. 为了得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的图象，只需把函数 $y = \sin 2x$ 的图象上所有的点

- (A) 向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度 (B) 向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
(C) 向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 (D) 向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

【答案】D

【解析】

试题分析：由题意，为了得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin[2(x - \frac{\pi}{6})]$ ，只需把函数 $y = \sin 2x$ 的图像上所有点向右移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，故选 D.

考点：三角函数图像的平移.

【名师点睛】 本题考查三角函数的图象平移，在函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象平移变换中要注意人

“ ω ”的影响，变换有两种顺序：一种 $y = \sin x$ 的图象向左平移 φ 个单位得 $y = \sin(x + \varphi)$ ，再把横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，纵坐标不变，得 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象，另一种是把 $y = \sin x$ 的图象横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍，纵坐标不变，得 $y = \sin \omega x$ 的图象，向左平移 $\frac{\varphi}{\omega}$ 个单位得 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象.

4. 用数字 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数，其中奇数的个数为

- (A) 24 (B) 48 (C) 60 (D) 72

【答案】D

【解析】

试题分析：由题意，要组成没有重复的五位奇数，则个位数应该为 1、3、5 中之一，其他位置共有随便排共 A_4^4 种可能，所以其中奇数的个数为 $3A_4^4 = 72$ ，故选 D.

考点：排列、组合

【名师点睛】 利用排列组合计数时，关键是正确进行分类和分步，分类时要注意不重不漏，分步时要注意整个事件的完成步骤. 在本题中，个位是特殊位置，第一步应先安排这个位置，第二步再安排其他四个位置.

5. 某公司为激励创新，计划逐年加大研发资金投入.若该公司 2015 年全年投入研发资金 130 万元，在此基础上，每年投入的研发资金比上一年增长 12%，则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 万元的年份是

(参考数据：lg 1.12 \approx 0.05, lg 1.3 \approx 0.11, lg 2 \approx 0.30)

- (A) 2018 年 (B) 2019 年 (C) 2020 年 (D) 2021 年

【答案】B

【解析】

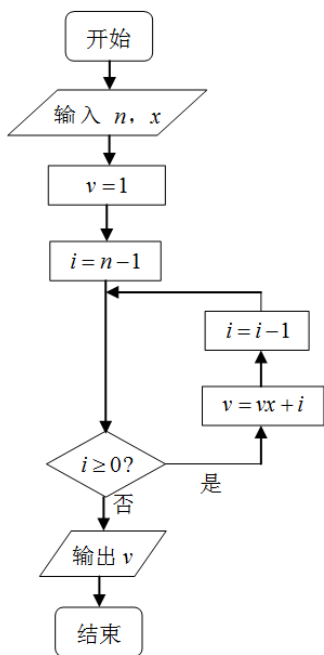
试题分析：设第 n 年的研发投入资金为 a_n ， $a_1 = 130$ ，则 $a_n = 130 \times 1.12^{n-1}$ ，由题意，需

$a_n = 130 \times 1.12^{n-1} \geq 200$ ，解得 $n \geq 5$ ，故从 2019 年该公司全年的投入的研发资金超过 200 万，选 B.

考点：等比数列的应用.

【名师点睛】 本题考查等比数列的实际应用. 在实际问题中平均增长率问题可以看作是等比数列的应用, 解题时要注意把哪个作为数列的首项, 然后根据等比数列的通项公式写出通项, 列出不等式或方程就可得出结论.

6. 秦九韶是我国南宋时期的数学家, 普州(现四川省安岳县)人, 他在所著的《数书九章》中提出的多项式求值的秦九韶算法, 至今仍是比较先进的算法. 如图所示的程序框图给出了利用秦九韶算法求某多项式值的一个实例, 若输入 n, x 的值分别为 3, 2, 则输出 v 的值为



- (A) 9 (B) 18 (C) 20 (D) 35

【答案】 B

【解析】

试题分析: 程序运行如下 $n = 3, x = 2 \rightarrow v = 1, i = 2 \geq 0 \rightarrow v = 1 \times 2 + 2 = 4, i = 1 \geq 0$

$\rightarrow v = 4 \times 2 + 1 = 9, i = 0 \geq 0 \rightarrow v = 9 \times 2 + 0 = 18, i = -1 < 0$, 结束循环, 输出 $v = 18$, 故选 B.

考点: 1. 程序与框图; 2. 秦九韶算法; 3. 中国古代数学史.

【名师点睛】 程序框图是高考的热点之一, 几乎是每年必考内容, 多半是考循环结构, 基本方法是将每次循环的结果一一列举出来, 与判断条件比较即可.

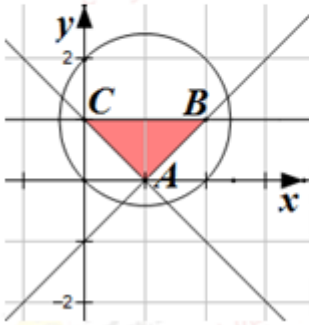
7. 设 p : 实数 x, y 满足 $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$, q : 实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \geq x-1, \\ y \geq 1-x, \\ y \leq 1, \end{cases}$ 则 p 是 q 的

- (A) 必要不充分条件 (B) 充分不必要条件 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

试题分析：画出可行域（如图所示），可知命题 q 中不等式组表示的平面区域 $\triangle ABC$ 在命题 p 中不等式表示的圆盘内，故选A.



考点：1. 充分条件、必要条件的判断；2. 线性规划.

【名师点睛】本题考查充分性与必要性的判断问题，首先是分清条件和结论，然后考察条件推结论，结论推条件是否成立.这类问题往往与函数、三角、不等式等数学知识结合起来考，本题条件与结论可以转化为平面区域的关系，利用充分性、必要性和集合的包含关系得结论.

8. 设 O 为坐标原点， P 是以 F 为焦点的抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$ 上任意一点， M 是线段 PF 上的点，且 $|PM| = 2|MF|$ ，则直线 OM 的斜率的最大值为

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) 1

【答案】C

【解析】

试题分析：设 $P(2pt^2, 2pt)$ ， $M(x, y)$ （不妨设 $t > 0$ ），则 $\overrightarrow{FP} = \left(2pt^2 - \frac{p}{2}, 2pt\right)$. 由已知得

$$\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FP}, \therefore \begin{cases} x - \frac{p}{2} = \frac{2p}{3}t^2 - \frac{p}{6}, \\ y = \frac{2pt}{3}, \end{cases}, \therefore \begin{cases} x = \frac{2p}{3}t^2 + \frac{p}{3}, \\ y = \frac{2pt}{3}, \end{cases}, \therefore k_{OM} = \frac{2t}{2t^2 + 1} = \frac{1}{t + \frac{1}{2t}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore (k_{OM})_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故选 C.}$$

考点：抛物线的简单的几何性质，基本不等式的应用.

【名师点睛】本题考查抛物线的性质，结合题意要求，利用抛物线的参数方程表示出抛物线上点 P 的坐标，

利用向量法求出点 M 的坐标，是我们求点坐标的常用方法，由于要求最大值，因此我们把 k 斜率用参数 t 表示出后，可根据表达式形式选用函数，或不等式的知识求出最值，本题采用基本不等式求出最值。

9. 设直线 l_1, l_2 分别是函数 $f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x > 1, \end{cases}$ 图象上点 P_1, P_2 处的切线， l_1 与 l_2 垂直相交于点 P ，

且 l_1, l_2 分别与 y 轴相交于点 A, B ，则 $\triangle PAB$ 的面积取值范围是

- (A) (0,1) (B) (0,2) (C) (0, + ∞) (D) (1, + ∞)

【答案】A

【解析】

试题分析：设 $P_1(x_1, \ln x_1), P_2(x_2, -\ln x_2)$ (不妨设 $x_1 > 1, 0 < x_2 < 1$)，则由导数的几何意义易得切线

l_1, l_2 的斜率分别为 $k_1 = \frac{1}{x_1}, k_2 = -\frac{1}{x_2}$ 。由已知得 $k_1 k_2 = -1, \therefore x_1 x_2 = 1, \therefore x_2 = \frac{1}{x_1}$ 。切线 l_1 的方程分别为

$y - \ln x_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$ ，切线 l_2 的方程为 $y + \ln x_2 = -\frac{1}{x_2}(x - x_2)$ ，即 $y - \ln x_1 = -x_1 \left(x - \frac{1}{x_1}\right)$ 。分别令

$x = 0$ 得 $A(0, -1 + \ln x_1), B(0, 1 + \ln x_1)$ 。又 l_1 与 l_2 的交点为 $P\left(\frac{2x_1}{1+x_1^2}, \ln x_1 + \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2}\right), \therefore x_1 > 1$ ，

$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |y_A - y_B| \cdot |x_P| = \frac{2x_1}{1+x_1^2} < \frac{1+x_1^2}{1+x_1^2} = 1, \therefore 0 < S_{\triangle PAB} < 1$ 。故选 A。

考点：1. 导数的几何意义；2. 两直线垂直关系；3. 直线方程的应用；4. 三角形面积取值范围。

【名师点睛】本题首先考查导数的几何意义，其次考查最值问题，解题时可设出切点坐标，利用切线垂直求出这两点的关系，同时得出切线方程，从而得点 A, B 坐标，由两直线相交得出 P 点坐标，从而求得面积，题中把面积用 x_1 表示后，可得它的取值范围。解决本题可以根据题意按部就班一步一步解得结论。这也是我们解决问题的一种基本方法，朴实而基础，简单而实用。

10. 在平面内，定点 A, B, C, D 满足 $|\overline{DA}| = |\overline{DB}| = |\overline{DC}|, \overline{DA} \cdot \overline{DB} = \overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DC} \cdot \overline{DA} = -2$ ，动点 $P,$

M 满足 $|\overline{AP}| = 1, \overline{PM} = \overline{MC}$ ，则 $|\overline{BM}|^2$ 的最大值是

- (A) $\frac{43}{4}$ (B) $\frac{49}{4}$ (C) $\frac{37+6\sqrt{3}}{4}$ (D) $\frac{37+2\sqrt{33}}{4}$

【答案】B

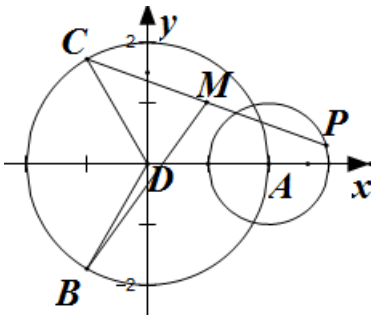
【解析】

试题分析：由已知易得 $\angle ADC = \angle ADB = \angle BDC = 120^\circ$, $|\overline{DA}| = |\overline{DB}| = |\overline{DC}| = 2$. 以 D 为原点, 直线 DA 为 x 轴建立平面直角坐标系, 则 $A(2, 0)$, $B(-1, -\sqrt{3})$, $C(-1, \sqrt{3})$. 设 $P(x, y)$, 由已知 $|\overline{AP}| = 1$, 得

$$(x-2)^2 + y^2 = 1, \text{ 又 } \overline{PM} = \overline{MC}, \therefore M\left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+\sqrt{3}}{2}\right), \therefore \overline{BM} = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore |\overline{BM}|^2 = \frac{(x+1)^2 + (y+3\sqrt{3})^2}{4}, \text{ 它表示圆 } (x-2)^2 + y^2 = 1 \text{ 上点 } (x, y) \text{ 与点 } (-1, -3\sqrt{3}) \text{ 距离平方的 } \frac{1}{4},$$

$$\therefore \left(|\overline{BM}|^2\right)_{\max} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} + 1 \right)^2 = \frac{49}{4}, \text{ 故选 B.}$$



考点：1. 向量的数量积运算；2. 向量的夹角；3. 解析几何中与圆有关的最值问题.

【名师点睛】本题考查平面向量的数量积与向量的模，由于结论是要求向量模的平方的最大值，因此我们要把它用一个参数表示出来，解题时首先对条件进行化简变形，本题中得出 $\angle ADC = \angle ADB = \angle BDC = 120^\circ$ ，且 $|\overline{DA}| = |\overline{DB}| = |\overline{DC}| = 2$ ，因此我们采用解析法，即建立直角坐标系，

写出 A, B, C, D 坐标，同时动点 P 的轨迹是圆， $|\overline{BM}|^2 = \frac{(x+1)^2 + (y+3\sqrt{3})^2}{4}$ ，因此可用圆的性质得出最

值.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

试题分析：由二倍角公式得 $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

考点：三角函数二倍角公式.

【名师点睛】这是一个来自于课本的题，直接利用课本公式解题，这告诉我们一定要立足于课本. 有许多三角函数的求值问题一般都是通过三角函数的公式把函数化为特殊角的三角函数值而求解.

12. 同时抛掷两枚质地均匀的硬币，当至少有一枚硬币正面向上时，就说这次试验成功，则在 2 次试验中成功次数 X 的均值是_____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

试题分析：同时抛掷两枚质地均匀的硬币，可能的结果有（正正），（正反），（反正），（反反），所以在 1 次

试验中成功次数 ξ 的取值为 0, 1, 2，其中 $P(\xi=0) = \frac{1}{4}$, $P(\xi=1) = \frac{1}{2}$, $P(\xi=2) = \frac{1}{4}$,

在 1 次试验中成功的概率为 $P(\xi \geq 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$,

所以在 2 次试验中成功次数 X 的概率为 $P(X=1) = C_2^1 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$, $P(X=2) = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$,

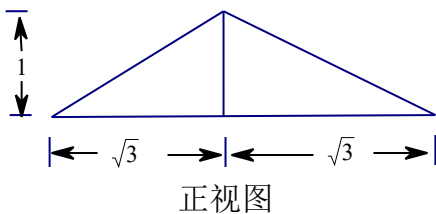
$EX = 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{9}{16} = \frac{3}{2}$

考点：离散型随机变量的均值

【名师点睛】本题考查随机变量的均值（期望），根据期望公式，首先求出随机变量的所有可能取值

x_1, x_2, \dots, x_n ，再求得对应的概率 $P_i (i=1, 2, \dots, n)$ ，则均值为 $\sum_{i=1}^n x_i P_i$.

13. 已知三棱锥的四个面都是腰长为 2 的等腰三角形，该三棱锥的正视图如图所示，则该三棱锥的体积是_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

试题分析：由三棱锥的正视图知，三棱锥的高为 1，底面边长为 $2\sqrt{3}$ ，2, 2，则底面等腰三角形的顶角为

120°，所以三棱锥的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 120^\circ \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

考点：三视图，几何体的体积。

【名师点睛】本题考查三视图，考查几何体体积，考查学生的识图能力。解题时要求我们根据三视图想象出几何体的形状，由三视图得出几何体的尺寸，为此我们必须掌握基本几何体（柱、锥、台、球）的三视图以及各种组合体的三视图。

14. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的周期为 2 的奇函数，当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) = 4^x$ ，则

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) + f(1) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】-2

【解析】

试题分析：因为函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上周期为 2 的奇函数，所以

$$f(-1) = -f(1), f(-1) = f(-1+2) = f(1), \text{ 所以 } -f(1) = f(1), \text{ 即 } f(1) = 0,$$

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}-2\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) = -4^{\frac{1}{2}} = -2, \text{ 所以 } f\left(-\frac{5}{2}\right) + f(1) = -2.$$

考点：函数的奇偶性和周期性。

【名师点睛】本题考查函数的奇偶性，周期性，属于基本题，在求值时，只要把 $f\left(-\frac{5}{2}\right)$ 和 $f(1)$ ，利用奇偶性与周期性化为 $(0,1)$ 上的函数值即可。

15. 在平面直角坐标系中，当 $P(x, y)$ 不是原点时，定义 P 的“伴随点”为 $P'\left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$ ；

当 P 是原点时，定义 P 的“伴随点”为它自身，平面曲线 C 上所有点的“伴随点”所构成的曲线 C' 定义为曲线 C 的“伴随曲线”。现有下列命题：

- ①若点 A 的“伴随点”是点 A' ，则点 A' 的“伴随点”是点 A
- ②单位圆的“伴随曲线”是它自身；
- ③若曲线 C 关于 x 轴对称，则其“伴随曲线” C' 关于 y 轴对称；
- ④一条直线的“伴随曲线”是一条直线。

其中的真命题是 （写出所有真命题的序列）。

【答案】②③

【解析】

试题分析：对于①，若令 $P(1,1)$ ，则其伴随点为 $P'(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ，而 $P'(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 的伴随点为 $(-1, -1)$ ，而不是 P ，

故①错误；对于②，设曲线 $f(x,y)=0$ 关于 x 轴对称，则 $f(x,-y)=0$ 与方程 $f(x,y)=0$ 表示同一曲线，

其伴随曲线分别为 $f(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})=0$ 与 $f(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})=0$ 也表示同一曲线，又曲线

$f(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})=0$ 与曲线 $f(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})=0$ 的图象关于 y 轴对称，所以②正确；③设单位圆

上任一点的坐标为 $P(\cos x, \sin x)$ ，其伴随点为 $P'(\sin x, -\cos x)$ 仍在单位圆上，故②正确；对于④，直线

$y=kx+b$ 上任一点 $P(x,y)$ 的伴随点是 $P'(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2})$ ，消参后点 P' 轨迹是圆，故④错误。所以正

确的为序号为②③。

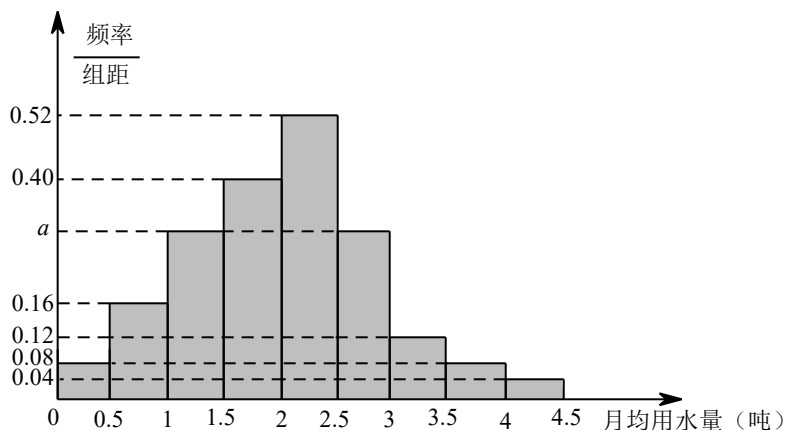
考点：对新定义的理解、函数的对称性。

【名师点睛】本题考查新定义问题，属于创新题，符合新高考的走向。它考查学生的阅读理解能力，接受新思维的能力，考查学生分析问题与解决问题的能力，新定义的概念实质上只是一个载体，解决新问题时，只要通过这个载体把问题转化为我们已经熟悉的知识即可。本题新概念“伴随”实质是一个变换，一个坐标变换，只要根据这个变换得出新的点的坐标，然后判断，问题就得以解决。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 12 分)

我国是世界上严重缺水的国家，某市政府为了鼓励居民节约用水，计划调整居民生活用水收费方案，拟确定一个合理的月用水量标准 x (吨)、一位居民的月用水量不超过 x 的部分按平价收费，超出 x 的部分按议价收费。为了了解居民用水情况，通过抽样，获得了某年 100 位居民每人的月均用水量 (单位：吨)，将数据按照 $[0,0.5)$, $[0.5,1)$, \dots , $[4,4.5)$ 分成 9 组，制成了如图所示的频率分布直方图。



(I) 求直方图中 a 的值;

(II) 设该市有 30 万居民, 估计全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数, 并说明理由;

(III) 若该市政府希望使 85% 的居民每月的用水量不超过标准 x (吨), 估计 x 的值, 并说明理由.

【答案】 (I) $a = 0.30$; (II) 36000; (III) 2.9.

【解析】

试题分析: (I) 由高 \times 组距=频率, 计算每组中的频率, 因为所有频率之和为 1, 计算出 a 的值; (II) 利用高 \times 组距=频率, 先计算出每人月均用水量不低于 3 吨的频率, 再利用频率 \times 样本总数=频数, 计算所求人数; (III) 将前 6 组的频率之和与前 5 组的频率之和进行比较, 得出 $2.5 \leq x < 3$, 再进行计算.

试题解析: (I) 由频率分布直方图知, 月均用水量在 $[0, 0.5)$ 中的频率为 $0.08 \times 0.5 = 0.04$,

同理, 在 $[0.5, 1)$, $[1.5, 2)$, $[2, 2.5)$, $[3, 3.5)$, $[3.5, 4)$, $[4, 4.5)$ 中的频率分别为 0.08, 0.20, 0.26, 0.06, 0.04, 0.02. 由 $0.04 + 0.08 + 0.5 \times a + 0.20 + 0.26 + 0.5 \times a + 0.06 + 0.04 + 0.02 = 1$, 解得 $a = 0.30$.

(II) 由 (I), 100 位居民每人月均用水量不低于 3 吨的频率为 $0.06 + 0.04 + 0.02 = 0.12$.

由以上样本的频率分布, 可以估计全市 30 万居民中月均用水量不低于 3 吨的人数为 $300\,000 \times 0.12 = 36\,000$.

(III) 因为前 6 组的频率之和为 $0.04 + 0.08 + 0.15 + 0.20 + 0.26 + 0.15 = 0.88 > 0.85$,

而前 5 组的频率之和为 $0.04 + 0.08 + 0.15 + 0.20 + 0.26 = 0.73 < 0.85$,

所以 $2.5 \leq x < 3$.

由 $0.3 \times (x - 2.5) = 0.85 - 0.73$,

解得 $x = 2.9$.

所以, 估计月用水量标准为 2.9 吨时, 85% 的居民每月的用水量不超过标准.

考点: 频率分布直方图.

【名师点睛】 本题主要考查频率分布直方图、频率、频数的计算公式等基础知识, 考查学生的分析问题解

决问题的能力.在频率分布直方图中,第个小矩形面积就是相应的频率或概率,所有小矩形面积之和为1,这是解题的关键,也是识图的基础.

17. (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,且 $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

(I) 证明: $\sin A \sin B = \sin C$;

(II) 若 $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{6}{5}bc$, 求 $\tan B$.

【答案】(I) 证明详见解析; (II) 4.

【解析】

试题分析: (I) 已知条件式中有边有角, 利用正弦定理, 将边角进行转化(本小题是将边转化为角), 结合诱导公式进行证明; (II) 从已知式可以看出首先利用余弦定理解出 $\cos A = \frac{3}{5}$, 再根据平方关系解出 $\sin A$, 代入(I)中等式 $\sin A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B$, 解出 $\tan B$ 的值.

试题解析: (I) 根据正弦定理, 可设 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k(k > 0)$.

则 $a = k \sin A$, $b = k \sin B$, $c = k \sin C$.

代入 $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ 中, 有

$\frac{\cos A}{k \sin A} + \frac{\cos B}{k \sin B} = \frac{\sin C}{k \sin C}$, 变形可得

$\sin A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin(A+B)$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $A+B+C=\pi$, 有 $\sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C$,

所以 $\sin A \sin B = \sin C$.

(II) 由已知, $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{6}{5}bc$, 根据余弦定理, 有

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3}{5}$.

所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4}{5}$.

由(I), $\sin A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B$,

所以 $\frac{4}{5} \sin B = \frac{4}{5} \cos B + \frac{3}{5} \sin B$,

故 $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = 4$.

考点：正弦定理、余弦定理、商数关系、平方关系.

【名师点睛】本题考查正弦定理、余弦定理、商数关系等基础知识，考查学生的分析问题的能力和计算能力.在解三角形的应用中，凡是遇到等式中有边又有角时，可用正弦定理进行边角互化，一种是化为三角函数问题，一般是化为代数式变形问题. 在角的变化过程中注意三角形的内角和为 180° 这个结论，否则难以得出结论.

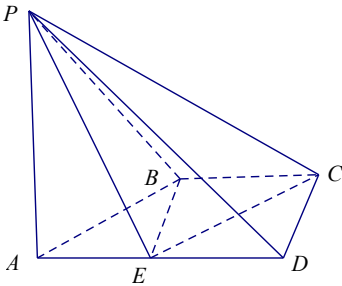
18. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ADC = \angle PAB = 90^\circ$ ， $BC = CD = \frac{1}{2}AD$ ， E 为边 AD 的中点，

异面直线 PA 与 CD 所成的角为 90° .

(I) 在平面 PAB 内找一点 M ，使得直线 $CM \parallel$ 平面 PBE ，学科网.并说明理由；

(II) 若二面角 $P-CD-A$ 的大小为 45° ，求直线 PA 与平面 PCE 所成角的正弦值.



【答案】(I) 详见解析；(II) $\frac{1}{3}$.

【解析】

试题分析：(I) 探索线面平行，根据是线面平行的判定定理，先证明线线平行，再得线面平行，而这可以利用已知的平行，易得 $CD \parallel EB$ ；从而知 M 为 DC 和 AB 的交点；(II) 求线面角，可以先找到这个角，即作出直线在平面内的射影，再在三角形中解出，也可以利用已知图形中的垂直建立空间直角坐标系，用向量法求出线面角（通过平面的法向量与直线的方向向量的夹角来求得）.

试题解析：(I) 在梯形 $ABCD$ 中， AB 与 CD 不平行.

延长 AB ， DC ，相交于点 M ($M \in$ 平面 PAB)，点 M 即为所求的一个点.理由如下：

由已知， $BC \parallel ED$ ，且 $BC = ED$.

所以四边形 $BCDE$ 是平行四边形.，所以 $CD \parallel EB$

从而 $CM \parallel EB$.

又 $EB \subset$ 平面 PBE ， $CM \not\subset$ 平面 PBE ，

所以 $CM \parallel$ 平面 PBE .

(说明: 延长 AP 至点 N , 使得 $AP=PN$, 则所找的点可以是直线 MN 上任意一点)

(II) 方法一:

由已知, $CD \perp PA$, $CD \perp AD$, $PA \cap AD=A$,

所以 $CD \perp$ 平面 PAD .

从而 $CD \perp PD$.

所以 $\angle PDA$ 是二面角 $P-CD-A$ 的平面角.

所以 $\angle PDA=45^\circ$.

设 $BC=1$, 则在 $Rt\triangle PAD$ 中, $PA=AD=2$.

过点 A 作 $AH \perp CE$, 交 CE 的延长线于点 H , 连接 PH .

易知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

从而 $PA \perp CE$.

于是 $CE \perp$ 平面 PAH .

所以平面 $PCE \perp$ 平面 PAH .

过 A 作 $AQ \perp PH$ 于 Q , 则 $AQ \perp$ 平面 PCE .

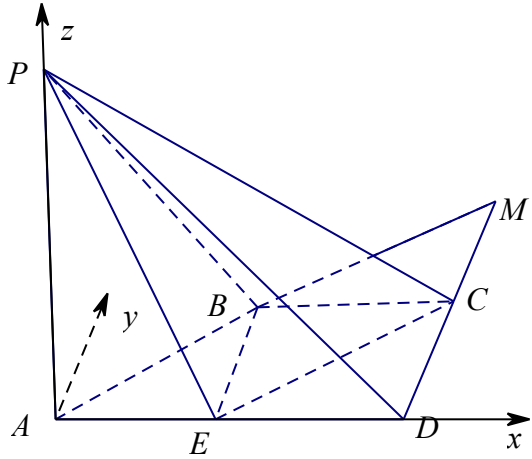
所以 $\angle APH$ 是 PA 与平面 PCE 所成的角.

在 $Rt\triangle AEH$ 中, $\angle AEH=45^\circ$, $AE=1$,

所以 $AH=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

在 $Rt\triangle PAH$ 中, $PH=\sqrt{PA^2+AH^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\sin \angle APH=\frac{AH}{PH}=\frac{1}{3}$.



考点：线线平行、线面平行、向量法.

【名师点睛】 本题考查线面平行、线线平行、向量法等基础知识，考查空间想象能力、分析问题的能力、计算能力.证明线面平行时，可根据判定定理的条件在平面内找一条平行线，而这条平行线一般是由过面外的直线的一个平面与此平面相交而得，证明时注意定理的另外两个条件（线在面内，线在面外）要写全，否则会被扣分，求线面角（以及其他角），一种方法可根据定义作出这个角（注意还要证明），然后通过解三角形求出这个角.另一种方法建立空间直角坐标系，用向量法求角，这种方法主要是计算，不需要“作角、证明”，关键是记住相应公式即可.

19. （本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_{n+1} = qS_n + 1$, 其中 $q > 0, n \in \mathbb{N}^*$.

(I) 若 $2a_2, a_3, a_2 + 2$ 成等差数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{a_n^2} = 1$ 的离心率为 e_n , 且 $e_2 = \frac{5}{3}$, 证明: $e_1 + e_2 + \dots + e_n > \frac{4^n - 3^n}{3^{n-1}}$.

【答案】 (I) $a_n = q^{n-1}$; (II) 详见解析.

【解析】

试题分析: (I) 已知 S_n 的递推式 $S_{n+1} = qS_n + 1$, 一般是写出当 $n \geq 2$ 时, $S_n = qS_{n-1} + 1$, 两式相减, 利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 得出数列 $\{a_n\}$ 的递推式, 从而证明 $\{a_n\}$ 为等比数列, 利用等比数列的通项公式得到结论;

(II) 先利用双曲线的离心率定义得到 e_n 的表达式, 再由 $e_2 = \frac{5}{3}$ 解出 q 的值, 要证明题设不等式, 一般想法是求出和 $e_1 + e_2 + \dots + e_n$, 但数列 $\{e_n\}$ 的和不可求, 因此我们利用放缩法得 $e_n > q^{n-1}$, 从而有

$e_1 + e_2 + \dots + e_n > 1 + q + \dots + q^{n-1}$ ，右边的和是等比数列的和，可求，此和即为要证不等式的右边。

最后利用等比数列的求和公式计算证明。

试题解析：(I) 由已知， $S_{n+1} = qS_n + 1, S_{n+2} = qS_{n+1} + 1$ ，两式相减得到 $a_{n+2} = qa_{n+1}, n \geq 1$ 。

又由 $S_2 = qS_1 + 1$ 得到 $a_2 = qa_1$ ，故 $a_{n+1} = qa_n$ 对所有 $n \geq 1$ 都成立。

所以，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 q 的等比数列。

从而 $a_n = q^{n-1}$ 。

由 $2a_2, a_3, a_2 + 2$ 成等比数列，可得 $2a_3 = 3a_2 + 2$ ，即 $2q^2 = 3q + 2$ ，则 $(2q+1)(q-2) = 0$ ，

由已知， $q > 0$ ，故 $q = 2$ 。

所以 $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(II) 由 (I) 可知， $a_k = q^{k-1}$ 。

所以双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{a_k^2} = 1$ 的离心率 $e_k = \sqrt{1 + a_k^2} = \sqrt{1 + q^{2(k-1)}}$ 。

由 $q = \sqrt{1 + q^2} = \frac{5}{3}$ 解得 $q = \frac{4}{3}$ 。

因为 $1 + q^{2(k-1)} > q^{2(k-1)}$ ，所以 $\sqrt{1 + q^{2(k-1)}} > q^{k-1} (k \in \mathbf{N}^*)$ 。

于是 $e_1 + e_2 + \dots + e_n > 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ，

故 $e_1 + e_2 + \dots + e_n > \frac{4^n - 3^n}{3^n - 1}$ 。

考点：数列的通项公式、双曲线的离心率、等比数列的求和公式。

【名师点睛】本题考查数列的通项公式、双曲线的离心率、等比数列的求和公式等基础知识，考查学生的分析问题解决问题的能力、计算能力。在第 (I) 问中，已知的是 S_n 的递推式，在与 S_n 的关系式中，经常用 $n-1$ 代换 n ($n \geq 2$)，然后两式相减，可得 a_n 的递推式，利用这种方法解题时要注意 a_1 ；在第 (II) 问中，不等式的证明用到了放缩法，这是证明不等式常用的方法，本题放缩的目的是为了求数列的和。另外放缩时要注意放缩的“度”，不能太大，否则得不到结果。

20. (本小题满分 13 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的三个顶点，直线

$l: y = -x + 3$ 与椭圆 E 有且只有一个公共点 T .

(I) 求椭圆 E 的方程及点 T 的坐标;

(II) 设 O 是坐标原点, 直线 l' 平行于 OT , 与椭圆 E 交于不同的两点 A, B , 且与直线 l 交于点 P . 证明: 存在常数 λ , 使得 $|PT|^2 = \lambda|PA| \cdot |PB|$, 并求 λ 的值.

【答案】 (I) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, 点 T 坐标为 $(2, 1)$; (II) $\lambda = \frac{4}{5}$.

【解析】

试题分析: (I) 由椭圆两个焦点与短轴的一个端点是直角三角形的三个顶点可得 $a = \sqrt{2}c$, 从而可得 $a = \sqrt{2}b$, 椭圆的标准方程中可减少一个参数, 再利用直线和椭圆只有一个公共点, 联立方程, 方程有两个相等实根, 解出 b 的值, 从而得到椭圆的标准方程; (II) 首先设出直线 l' 方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$, 由两直线方程求出点 P 坐标, 得 $|PT|^2$, 同时设交点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 把 l' 方程与椭圆方程联立后消去 y 得 x 的二次方程, 利用根与系数关系, 得 $x_1 + x_2, x_1x_2$, 再计算 $|PA| \cdot |PB|$, 比较可得 λ 值.

试题解析: (I) 由已知, $a^2 + a^2 = (2c)^2$, 即 $a = \sqrt{2}c$, 所以 $a = \sqrt{2}b$, 则椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\text{由方程组 } \begin{cases} \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = -x + 3, \end{cases} \text{ 得 } 3x^2 - 12x + (18 - 2b^2) = 0. \textcircled{1}$$

方程①的判别式为 $\Delta = 24(b^2 - 3)$, 由 $\Delta = 0$, 得 $b^2 = 3$,

此方程①的解为 $x = 2$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

点 T 坐标为 $(2, 1)$.

(II) 由已知可设直线 l' 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + m (m \neq 0)$,

$$\text{有方程组 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + m, \\ y = -x + 3, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x = 2 - \frac{2m}{3}, \\ y = 1 + \frac{2m}{3}. \end{cases}$$

所以 P 点坐标为 $(2 - \frac{2m}{3}, 1 + \frac{2m}{3})$, $|PT|^2 = \frac{8}{9}m^2$.

设点 A, B 的坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{由方程组 } \begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = \frac{1}{2}x + m, \end{cases} \text{ 可得 } 3x^2 + 4mx + (4m^2 - 12) = 0. \textcircled{2}$$

方程②的判别式为 $\Delta = 16(9 - 2m^2)$, 由 $\Delta > 0$, 解得 $-\frac{3\sqrt{2}}{2} < m < \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{由 } \textcircled{2} \text{ 得 } x_1 + x_2 = -\frac{4m}{3}, x_1x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3}.$$

$$\text{所以 } |PA| = \sqrt{(2 - \frac{2m}{3} - x_1)^2 + (1 + \frac{2m}{3} - y_1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \left| 2 - \frac{2m}{3} - x_1 \right|,$$

$$\text{同理 } |PB| = \frac{\sqrt{5}}{2} \left| 2 - \frac{2m}{3} - x_2 \right|,$$

$$\text{所以 } |PA| \cdot |PB| = \frac{5}{4} \left| (2 - \frac{2m}{3} - x_1)(2 - \frac{2m}{3} - x_2) \right|$$

$$= \frac{5}{4} \left| (2 - \frac{2m}{3})^2 - (2 - \frac{2m}{3})(x_1 + x_2) + x_1x_2 \right|$$

$$= \frac{5}{4} \left| (2 - \frac{2m}{3})^2 - (2 - \frac{2m}{3})(-\frac{4m}{3}) + \frac{4m^2 - 12}{3} \right|$$

$$= \frac{10}{9}m^2.$$

故存在常数 $\lambda = \frac{4}{5}$, 使得 $|PT|^2 = \lambda |PA| \cdot |PB|$.

考点: 椭圆的标准方程及其几何性质.

【名师点睛】 本题考查椭圆的标准方程及其几何性质, 考查学生的分析问题解决问题的能力, 考查数形结合的思想. 在涉及到直线与椭圆 (圆锥曲线) 的交点问题时, 一般都设交点坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 同时把直线方程与椭圆方程联立, 消元后, 可得 $x_1 + x_2, x_1x_2$, 再把 $|PA| \cdot |PB|$ 用 x_1, x_2 表示出来, 并代入刚才的 $x_1 + x_2, x_1x_2$, 这种方法是解析几何中的“设而不求”法. 可减少计算量, 简化解题过程. 学科网

21. (本小题满分 14 分)

设函数 $f(x)=ax^2-a-\ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 确定 a 的所有可能取值, 使得 $f(x) > \frac{1}{x} - e^{1-x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立($e=2.718\cdots$ 为自然对数的底数).

【答案】 (I) 当 $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2a}})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (\frac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; (II) $a \in [\frac{1}{2}, +\infty)$.

【解析】

试题分析: (I) 对 $f(x)$ 求导, 对 a 进行讨论, 研究 $f'(x)$ 的正负, 可判断函数的单调性; (II) 要证明不等式 $f(x) > \frac{1}{x} - e^{1-x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 基本方法是设 $h(x) = f(x) - (\frac{1}{x} - e^{1-x}) (x \geq 1)$, 当 $x > 1$ 时,

$h'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - e^{1-x}$, $h'(x) = 0$ 的解不易确定, 因此结合 (I) 的结论, 缩小 a 的范围, 设

$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{x-1}} \frac{e^{x-1} - x}{xe^{x-1}}$, 并设 $s(x) = e^{x-1} - x$, 通过研究 $s(x)$ 的单调性得 $x > 1$ 时, $g(x) > 0$, 从而

$f(x) > 0$, 这样得出 $a \leq 0$ 不合题意, 又 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 的极小值点 $x = \frac{1}{\sqrt{2a}} > 1$, 且

$f(\frac{1}{\sqrt{2a}}) < f(1) = 0$, 也不合题意, 从而 $a \geq \frac{1}{2}$, 此时考虑 $h'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - e^{1-x}$ 得

$h'(x) > x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} > 0$, 得此时 $h(x)$ 单调递增, 从而有 $h(x) > h(1) = 0$, 得出结论.

试题解析: (I) $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 1}{x} (x > 0)$.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减.

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 有 $x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

此时, 当 $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{2a}})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\frac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$$(II) \text{ 令 } g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^{x-1}}, \quad s(x) = e^{x-1} - x.$$

则 $s'(x) = e^{x-1} - 1$.

而当 $x > 1$ 时, $s'(x) > 0$,

所以 $s(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递增.

又由 $s(1) = 0$, 有 $s(x) > 0$,

从而当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$.

当 $a \leq 0$, $x > 1$ 时, $f(x) = a(x^2 - 1) - \ln x < 0$.

故当 $f(x) > g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内恒成立时, 必有 $a > 0$.

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $\frac{1}{\sqrt{2a}} > 1$.

由 (I) 有 $f(\frac{1}{\sqrt{2a}}) < f(1) = 0$, 从而 $g(\frac{1}{\sqrt{2a}}) > 0$,

所以此时 $f(x) > g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内不恒成立.

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, 令 $h(x) = f(x) - g(x) (x \geq 1)$,

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } h'(x) = 2ax - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - e^{1-x} > x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2} > \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} > 0,$$

因此, $h(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递增.

又因为 $h(1) = 0$, 所以当 $x > 1$ 时, $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, 即 $f(x) > g(x)$ 恒成立.

综上, $a \in [\frac{1}{2}, +\infty)$.

考点: 导数的计算、利用导数求函数的单调性, 最值、解决恒成立问题.

【名师点睛】 本题考查导数的计算、利用导数求函数的单调性, 最值、解决恒成立问题, 考查学生的分析问题解决问题的能力 and 计算能力. 求函数的单调性, 基本方法是求 $f'(x)$, 解方程 $f'(x) = 0$, 再通过 $f'(x)$ 的正负确定 $f(x)$ 的单调性; 要证明函数不等式 $f(x) > g(x)$, 一般证明 $f(x) - g(x)$ 的最小值大于 0, 为此要研究函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的单调性. 本题中注意由于函数 $h(x)$ 有极小值没法确定, 因此要利用已经

求得的结论缩小参数取值范围. 比较新颖, 学生不易想到. 有一定的难度.