

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第I卷1至2页，第II卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利！

第I卷

注意事项：

1. 每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
2. 本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

·如果事件 A 、 B 互斥，那么 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

·如果事件 A 、 B 相互独立，那么 $P(AB) = P(A)P(B)$ 。

·圆柱的体积公式 $V = Sh$ ，其中 S 表示圆柱的底面面积， h 表示圆柱的高。

·棱锥的体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 表示棱锥的底面面积， h 表示棱锥的高。

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{-1, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x < 3\}$ ，则 $(A \cap C) \cup B =$

- A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ x \geq -1, \\ y \geq -1, \end{cases}$ 则目标函数 $z = -4x + y$ 的最大值为

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

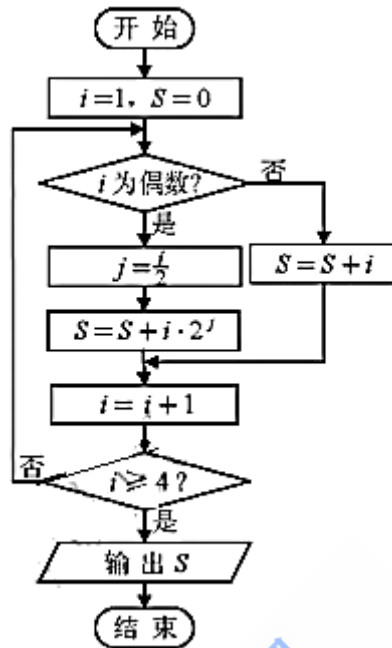
3. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $x^2 - 5x < 0$ ”是“ $|x - 1| < 1$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 阅读下边的程序框图，运行相应的程序，输出 S 的值为



A. 5

B. 8

C. 24

D. 29

5. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线为 l ，若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B ，且 $|AB| = 4|OF|$ (O 为原点)，则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

6. 已知 $a = \log_5 2$ ， $b = \log_{0.5} 0.2$ ， $c = 0.5^{0.2}$ ，则 a, b, c 的大小关系为

A. $a < c < b$

B. $a < b < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

7. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 是奇函数，将 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍 (纵坐标不变)，所得图象对应的函数为 $g(x)$ 。若 $g(x)$ 的最小正周期为 2π ，且

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ 则 } f\left(\frac{3\pi}{8}\right) =$$

A. -2

B. $-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. 2

8. 已知 $a \in \mathbf{R}$ ，设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1, \\ x - a \ln x, & x > 1. \end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立，则 a

的取值范围为

- A. $[0,1]$ B. $[0,2]$ C. $[0,e]$ D. $[1,e]$

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）

第II卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2. 本卷共12小题，共110分。

二. 填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分。

9. i 是虚数单位，则 $\left| \frac{5-i}{1+i} \right|$ 的值为_____.

10. $\left(2x - \frac{1}{8x^3} \right)^8$ 的展开式中的常数项为_____.

11. 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，侧棱长均为 $\sqrt{5}$. 若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为_____.

12. 设 $a \in \mathbf{R}$ ，直线 $ax - y + 2 = 0$ 和圆 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta, \\ y = 1 + 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 相切，则 a 的值为_____.

13. 设 $x > 0$, $y > 0$, $x + 2y = 5$, 则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为_____.

14. 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AD = 5$, $\angle A = 30^\circ$, 点 E 在线段 CB 的延长线上, 且 $AE = BE$, 则 $\overline{BD} \cdot \overline{AE} =$ _____.

三. 解答题：本大题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分13分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b + c = 2a$, $3c \sin B = 4a \sin C$.

(I) 求 $\cos B$ 的值;

(II) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

16. (本小题满分13分)

设甲、乙两位同学上学期间, 每天7:30之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响, 且任一同学每天到校情况相互独立.

(I) 用 X 表示甲同学上学期间的三天中7:30之前到校的天数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

(II) 设 M 为事件“上学期间的三天中, 甲同学在7:30之前到校的天数比乙同学在7:30之前到校的天数恰好多2”, 求事件 M 发生的概率.

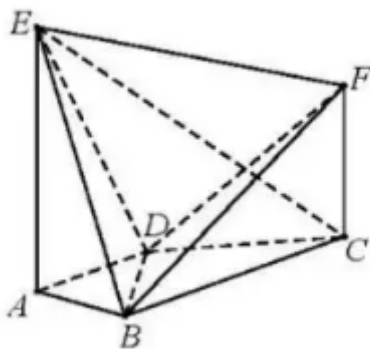
17. (本小题满分13分)

如图, $AE \perp$ 平面 $ABCD$, $CF \parallel AE$, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AB = AD = 1$, $AE = BC = 2$.

(I) 求证: $BF \parallel$ 平面 ADE ;

(II) 求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值;

(III) 若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 求线段 CF 的长.



18. (本小题满分13分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 上顶点为 B . 已知椭圆的短轴长为4, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 设点 P 在椭圆上, 且异于椭圆的上、下顶点, 点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点, 点 N 在 y 轴的负半轴上. 若 $|ON| = |OF|$ (O 为原点), 且 $OP \perp MN$, 求直线 PB 的斜率.

19. (本小题满分14分)

设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列. 已知 $a_1 = 4, b_1 = 6, b_2 = 2a_2 - 2, b_3 = 2a_3 + 4$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = 1, c_n = \begin{cases} 1, & 2^k < n < 2^{k+1}, \\ b_k, & n = 2^k, \end{cases}$ 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

(i) 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式;

(ii) 求 $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

20. (本小题满分14分)

设函数 $f(x) = e^x \cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, 证明 $f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0$;

(III) 设 x_n 为函数 $u(x) = f(x) - 1$ 在区间 $\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 内的零点, 其中 $n \in \mathbf{N}$, 证明

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}.$$

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.

【答案】D

【解析】

【分析】

先求 $A \cap B$ ，再求 $(A \cap C) \cup B$ 。

【详解】因为 $A \cap C = \{1, 2\}$ ，

所以 $(A \cap C) \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ 。

故选D。

【点睛】集合的运算问题，一般要先研究集合中元素的构成，能化简的要先化简，同时注意数形结合，即借助数轴、坐标系、韦恩图等进行运算。

2. 设

【答案】C

【解析】

【分析】

画出可行域，用截距模型求最值。

【详解】已知不等式组表示的平面区域如图中的阴影部分。

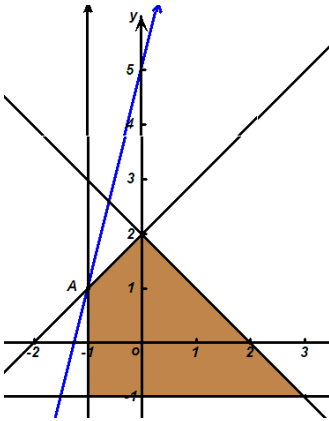
目标函数的几何意义是直线 $y = 4x + z$ 在 y 轴上的截距，

故目标函数在点 A 处取得最大值。

$$\text{由} \begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ x = -1 \end{cases}, \text{得 } A(-1, 1),$$

所以 $z_{\max} = -4 \times (-1) + 1 = 5$ 。

故选C。



【点睛】线性规划问题，首先明确可行域对应的是封闭区域还是开放区域，分界线是实线还是虚线，其次确定目标函数的几何意义，是求直线的截距、两点间距离的平方、直线的斜率、还是点到直线的距离等等，最后结合图形确定目标函数最值或范围。即：一画，二移，三求。

3.

【答案】B

【解析】

【分析】

分别求出两不等式的解集，根据两解集的包含关系确定。

【详解】 $x^2 - 5x < 0$ ，即 $0 < x < 5$ ，

$|x-1| < 1$ 等价于 $0 < x < 2$ ，故 $0 < x < 5$ 推不出 $|x-1| < 1$ ；

由 $|x-1| < 1$ 能推出 $0 < x < 5$ 。

故“ $x^2 - 5x < 0$ ”是“ $|x-1| < 1$ ”的必要不充分条件。

故选B。

【点睛】充要条件的三种判断方法：

(1) 定义法：根据 $p \Rightarrow q$ ， $q \Rightarrow p$ 进行判断；

(2) 集合法：根据由 p ， q 成立的对象构成的集合之间的包含关系进行判断；

(3) 等价转化法：根据一个命题与其逆否命题的等价性，把要判断的命题转化为其逆否命题进行判断。这个方法特别适合以否定形式给出的问题。

4.

【答案】B

【解析】

【分析】

根据程序框图，逐步写出运算结果。

【详解】详解： $S=1, i=2 \rightarrow j=1, S=1+2 \cdot 2^1=5, i=3 \quad S=8, i=4,$

结束循环，故输出8。

故选B。

【点睛】解决此类型问题时要注意：①要明确是当型循环结构，还是直到型循环结构，根据各自的特点执行循环体；②要明确图中的累计变量，明确每一次执行循环体前和执行循环体后，变量的值发生的变化；③要明确循环体终止的条件是什么，会判断什么时候终止循环体。

5.

【答案】D

【解析】

【分析】

只需把 $|AB|=4|OF|$ 用 a, b, c 表示出来，即可根据双曲线离心率的定义求得离心率。

【详解】 l 的方程为 $x=-1$ ，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$ ，

故得 $A(-1, \frac{b}{a}), B(-1, -\frac{b}{a})$ ，

所以 $|AB|=\frac{2b}{a}$ ， $\frac{2b}{a}=4$ ， $b=2a$ ，

所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{5}$ 。

故选D。

【点睛】双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 。

6

【答案】A

【解析】

【分析】

利用利用 $0, \frac{1}{2}, 1$ 等中间值区分各个数值的大小。

$$\text{【详解】 } a = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} < \frac{1}{2},$$

$$b = \log_{0.5} 0.2 > \log_{0.5} 0.25 = 2,$$

$$0.5^1 < 0.5^{0.2} < 0.5^0, \text{ 故 } \frac{1}{2} < c < 1,$$

所以 $a < c < b$ 。

故选A。

【点睛】利用指数函数、对数函数的单调性时要根据底数与1的大小区别对待。

7.

【答案】A

【解析】

【分析】

只需根据函数性质逐步得出 A, ω, φ 值即可。

$$\text{【详解】 } f(x) \text{ 为奇函数, 可知 } f(0) = A \sin \varphi = 0,$$

$$\text{由 } |\varphi| < \pi \text{ 可得 } \varphi = 0;$$

$$\text{把其图象上各点的横坐标伸长到原来的2倍, 得 } g(x) = A \sin \frac{1}{2} \omega x,$$

$$\text{由 } g(x) \text{ 的最小正周期为 } 2\pi \text{ 可得 } \omega = 2,$$

$$\text{由 } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ 可得 } A = 2,$$

$$\text{所以 } f(x) = 2 \sin 2x, \quad f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 \sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

故选C。

【点睛】在 $x=0$ 处有定义的奇函数必有 $f(0) = 0$ 。

8.

【答案】C

【解析】

【分析】

先判断 $a \geq 0$ 时, $x^2 - 2ax + 2a \geq 0$ 在 $(-\infty, 1]$ 上恒成立; 若 $x - a \ln x \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 转化为

$a \leq \frac{x}{\ln x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立。

【详解】首先 $f(0) \geq 0$, 即 $a \geq 0$,

当 $0 \leq a \leq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 2ax + 2a = (x-a)^2 + 2a - a^2 \geq 2a - a^2 = a(2-a) > 0$,

当 $a < 1$ 时, $f(1) = 1 > 0$,

故当 $a \geq 0$ 时, $x^2 - 2ax + 2a \geq 0$ 在 $(-\infty, 1]$ 上恒成立;

若 $x - a \ln x \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a \leq \frac{x}{\ln x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

令 $g(x) = \frac{x}{\ln x}$, 则 $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$,

易知 $x = e$ 为函数 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 唯一的极小值点、也是最小值点,

故 $g(x)_{\min} = g(e) = e$, 所以 $a \leq e$ 。

综上所述, a 的取值范围是 $[0, e]$ 。

故选C。

【点睛】 $a \leq f(x)$ 在 D 上恒成立, 等价于 $a \leq f(x)_{\min}, x \in D$; $a \geq f(x)$ 在 D 上恒成立, 等价于

$a \geq f(x)_{\max}, x \in D$ 。

第II卷

二. 填空题: 本大题共6小题.

9. i 是虚数单位, 则 $\left| \frac{5-i}{1+i} \right|$ 的值为_____.

【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】

先化简复数，再利用复数模的定义求所给复数的模。

【详解】解法一： $\left| \frac{5-i}{1+i} \right| = \left| \frac{(5-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \right| = |2-3i| = \sqrt{13}$ 。

解法二： $\left| \frac{5-i}{1+i} \right| = \frac{|5-i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}} = \sqrt{13}$ 。

【点睛】所以解答与复数概念或运算有关的问题时，需把所给复数化为代数形式，即 $a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的形式，再根据题意求解。

10. $\left(2x - \frac{1}{8x^3} \right)^8$ 是展开式中的常数项为_____。

【答案】 28

【解析】

【分析】

根据二项展开式的通项公式得出通项，根据方程思想得出 r 的值，再求出其常数项。

【详解】 $T_{r+1} = C_8^r (2x)^{8-r} \left(-\frac{1}{8x^3}\right)^r = (-1)^r 2^{8-4r} C_8^r x^{8-4r}$ ，

由 $8-4r=0$ ，得 $r=2$ ，

故所求的常数项为 $(-1)^2 C_8^2 = 28$ 。

【点睛】二项式中含有负号时，要把负号与其后面的字母看作一个整体，计算中要特别注意符号。

11. 已知四棱锥的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，侧棱长均为 $\sqrt{5}$ 。若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为_____。

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析】

【分析】

根据棱锥的结构特点，确定所求的圆柱的高和底面半径。

【详解】 四棱锥的高为 $\sqrt{5-1} = 2$ ，

故圆柱的高为1，圆柱的底面半径为 $\frac{1}{2}$ ，

故其体积为 $\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{\pi}{4}$ 。

【点睛】圆柱的底面半径是棱锥底面对角线长度的一半、不是底边棱长的一半。

12. 设 $a \in R$ ，直线 $ax - y + 2 = 0$ 和圆 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta, \\ y = 1 + 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 相切，则 a 的值为_____。

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】

根据圆的参数方程确定圆的半径和圆心坐标，再根据直线与圆相切的条件得出 a 满足的方程，解之解得。

【详解】圆心坐标为 $(2, 1)$ ，圆的半径为 2，

所以 $\frac{|2a+1|}{\sqrt{a^2+1}} = 2$ ，

即 $4a^2 + 4a + 1 = 4a^2 + 4$ ，

解得 $a = \frac{3}{4}$ 。

【点睛】直线与圆的位置关系可以使用判别式法，但一般是根据圆心到直线的距离与圆的半径的大小作出判断。

13. 设 $x > 0$ ， $y > 0$ ， $x + 2y = 5$ ，则 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为_____。

【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

把分子展开化为 $2xy + 6$ ，再利用基本不等式求最值。

【详解】 $\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}} = \frac{2xy + x + 2y + 1}{\sqrt{xy}} = \frac{2xy + 6}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2\sqrt{2xy \cdot 6}}{\sqrt{xy}} = 4\sqrt{3}$ ，

等号当且仅当 $xy = 3$ ，即 $x = 3, y = 1$ 时成立。

故所求的最小值为 $4\sqrt{3}$ 。

【点睛】 使用基本不等式求最值时一定要验证等号是否能够成立。

14. 在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ， $AD = 5$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，点 E 在线段 CB 的延长线上，且 $AE = BE$ ，则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 -1

【解析】

【分析】

可利用向量的线性运算，也可以建立坐标系利用向量的坐标运算求解。

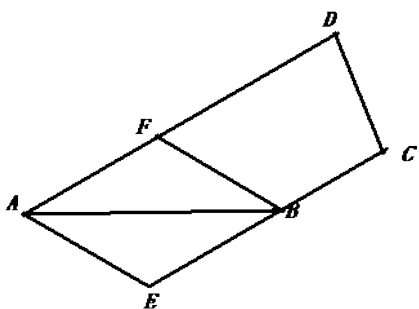
【详解】 解法一：如图，过点 B 作 AE 的平行线交 AD 于 F ，

因为 $AE = BE$ ，故四边形 $AEBF$ 为菱形。

因为 $\angle BAD = 30^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ，所以 $AF = 2$ ，即 $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ 。

因为 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ ，

所以 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}) = \frac{7}{5}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2 - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{7}{5} \times 2\sqrt{3} \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 12 - 10 = -1$



解法二：建立如图所示的直角坐标系，则 $B(2\sqrt{3}, 0)$ ， $D(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$ 。

因为 $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD = 30^\circ$ ，所以 $\angle CBE = 30^\circ$ ，

因为 $AE = BE$ ，所以 $\angle BAE = 30^\circ$ ，

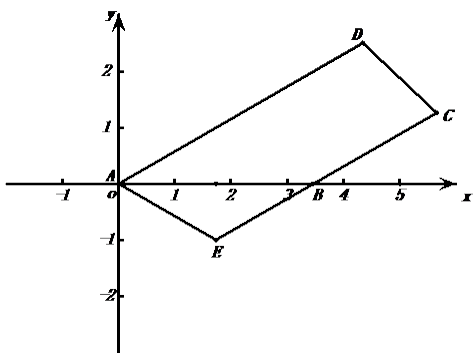
所以直线 BE 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，其方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2\sqrt{3})$ ，

直线 AE 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，其方程为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 。

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2\sqrt{3}), \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases} \quad \text{得 } x = \sqrt{3}, y = -1,$$

所以 $E(\sqrt{3}, -1)$ 。

$$\text{所以 } \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right) \cdot (\sqrt{3}, -1) = -1。$$



【点睛】平面向量问题有两大类解法：基向量法和坐标法，在便于建立坐标系的问题中使用坐标方法更为方便。

三. 解答题. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $b + c = 2a$, $3c \sin B = 4a \sin C$.

(I) 求 $\cos B$ 的值;

(II) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

$$\text{【答案】} \quad \text{(I) } \cos B = -\frac{1}{4} \quad \text{(II) } \sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{5} + 7}{16}$$

【解析】

【分析】

(I) 由题意结合正弦定理得到 a, b, c 的比例关系，然后利用余弦定理可得 $\cos B$ 的值

(II) 利用二倍角公式首先求得 $\sin 2B, \cos 2B$ 的值，然后利用两角和的正弦公式可得 $a = 2$ 的值.

【详解】(I) 解: 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $b \sin C = c \sin B$, 又由

$3c \sin B = 4a \sin C$, 得 $3b \sin C = 4a \sin C$, 即 $3b = 4a$. 又因为 $b + c = 2a$, 得到 $b = \frac{4}{3}a$, $c = \frac{2}{3}a$. 由余

弦定理可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a} = -\frac{1}{4}$.

(II) 解: 由 (I) 可得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 从而 $\sin 2B = 2 \sin B \cos B = -\frac{\sqrt{15}}{8}$,

$\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = -\frac{7}{8}$, 故

$\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{5} + 7}{16}$

【点睛】本题主要考查同角三角函数的基本关系, 两角和的正弦公式, 二倍角的正弦与余弦公式, 以及正弦定理、余弦定理等基础知识. 考查计算求解能力.

16. 设甲、乙两位同学上学期间, 每天7:30之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响, 且任一同学每天到校情况相互独立.

(I) 用 X 表示甲同学上学期间的三天中7:30之前到校的天数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

(II) 设 M 为事件“上学期间的三天中, 甲同学在7:30之前到校的天数比乙同学在7:30之前到校的天数恰好多2”, 求事件 M 发生的概率.

【答案】(I) 见解析; (II) $\frac{20}{243}$

【解析】

【分析】

(I) 由题意可知分布列为二项分布, 结合二项分布的公式求得概率可得分布列, 然后利用二项分布的期望公式求解数学期望即可;

(II) 由题意结合独立事件概率公式计算可得满足题意的概率值.

【详解】(I) 因为甲同学上学期间的三天中到校情况相互独立, 且每天7:30之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$,

故 $X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$, 从而 $P(X = k) = C_3^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k} (k = 0, 1, 2, 3)$.

所以，随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$		$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$.

(II) 设乙同学上学期间的三天中7:30之前到校的天数为 Y ，则 $Y \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$.

且 $M = \{X = 3, Y = 1\} \cup \{X = 2, Y = 0\}$.

由题意知事件 $\{X = 3, Y = 1\}$ 与 $\{X = 2, Y = 0\}$ 互斥，

且事件 $\{X = 3\}$ 与 $\{Y = 1\}$ ，事件 $\{X = 2\}$ 与 $\{Y = 0\}$ 均相互独立，

从而由 (I) 知：

$$P(M) = P(\{X = 3, Y = 1\} \cup \{X = 2, Y = 0\})$$

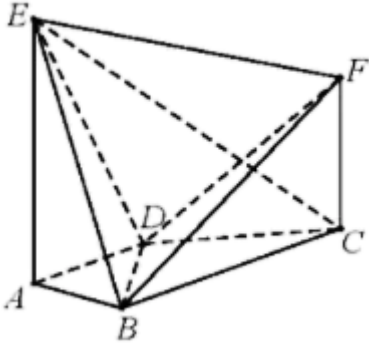
$$= P(X = 3, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0)$$

$$= P(X = 3)P(Y = 1) + P(X = 2)P(Y = 0)$$

$$= \frac{8}{27} \times \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{27} = \frac{20}{243}.$$

【点睛】 本题主要考查离散型随机变量的分布列与数学期望，互斥事件和相互独立事件的概率计算公式等基础知识. 考查运用概率知识解决简单实际问题的能力.

17. 如图， $AE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $CF \parallel AE$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = AD = 1$ ， $AE = BC = 2$.



(I) 求证: $BF \parallel$ 平面 ADE ;

(II) 求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值;

(III) 若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 求线段 CF 的长.

【答案】 (I) 见证明; (II) $\frac{4}{9}$ (III) $\frac{8}{7}$

【解析】

【分析】

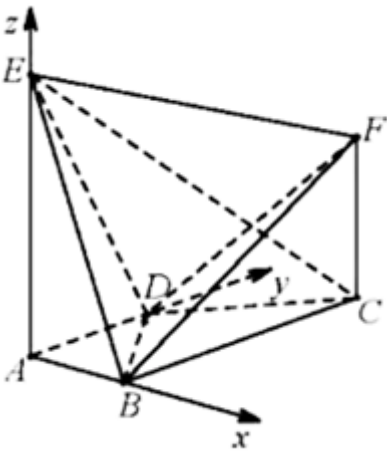
首先利用几何体的特征建立空间直角坐标系

(I) 利用直线 BF 的方向向量和平面 ADE 的法向量的关系即可证明线面平行;

(II) 分别求得直线 CE 的方向向量和平面 BDE 的法向量, 然后求解线面角的正弦值即可;

(III) 首先确定两个半平面的法向量, 然后利用二面角的余弦值计算公式得到关于 CF 长度的方程, 解方程可得 CF 的长度.

【详解】 依题意, 可以建立以 A 为原点, 分别以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ 的方向为 x 轴, y 轴, z 轴正方向的空间直角坐标系 (如图),



可得 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,2,0), D(0,1,0), E(0,0,2)$.

设 $CF = h (h > 0)$, 则 $F(1, 2, h)$.

(I) 依题意, $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$ 是平面 ADE 的法向量,

又 $\overrightarrow{BF} = (0, 2, h)$, 可得 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,

又因为直线 $BF \not\subset$ 平面 ADE , 所以 $BF \parallel$ 平面 ADE .

(II) 依题意, $\overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{BE} = (-1, 0, 2)$, $\overrightarrow{CE} = (-1, -2, 2)$,

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 BDE 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases},$$

不妨令 $z=1$, 可得 $\vec{n} = (2, 2, 1)$,

$$\text{因此有} \cos \langle \overrightarrow{CE}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{CE} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{CE}| |\vec{n}|} = -\frac{4}{9}.$$

所以, 直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{4}{9}$.

(III) 设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 为平面 BDF 的法向量, 则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2y + hz = 0 \end{cases}$.

不妨令 $y=1$, 可得 $\vec{m} = \left(1, 1, -\frac{2}{h}\right)$.

$$\text{由题意, 有} \left| \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\left|4 - \frac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2 + \frac{4}{h^2}}} = \frac{1}{3}, \text{解得} h = \frac{8}{7}.$$

经检验, 符合题意.

所以, 线段 CF 的长为 $\frac{8}{7}$.

【点睛】 本题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识. 考查用空间向量解决立体几何问题的方法. 考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力.

18. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 上顶点为 B . 已知椭圆的短轴长为 4, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 设点 P 在椭圆上, 且异于椭圆的上、下顶点, 点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点, 点 N 在 y 轴的负半轴上. 若 $|ON|=|OF|$ (O 为原点), 且 $OP \perp MN$, 求直线 PB 的斜率.

【答案】 (I) (II) $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 或 $-\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

【解析】

【分析】

(I) 由题意得到关于 a, b, c 的方程, 解方程可得椭圆方程;

(II) 联立直线方程与椭圆方程确定点 P 的值, 从而可得 OP 的斜率, 然后利用斜率公式可得 MN 的斜率表达式, 最后利用直线垂直的充分必要条件得到关于斜率的方程, 解方程可得直线的斜率.

【详解】 (I)

设椭圆的半焦距为 c , 依题意, $2b=4, \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 又 $a^2=b^2+c^2$, 可得 $a=\sqrt{5}, b=2, c=1$.

所以, 椭圆方程为.

(II) 由题意, 设 $P(x_p, y_p) (x_p \neq 0), M(x_M, 0)$. 设直线 PB 的斜率为 $k (k \neq 0)$,

又 $B(0, 2)$, 则直线 PB 的方程为 $y=kx+2$, 与椭圆方程联立
$$\begin{cases} y=kx+2 \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$$

整理得 $(4+5k^2)x^2+20kx=0$, 可得 $x_p=-\frac{20k}{4+5k^2}$,

代入 $y=kx+2$ 得 $y_p=\frac{8-10k^2}{4+5k^2}$,

进而直线 OP 的斜率 $\frac{y_p}{x_p}=\frac{4-5k^2}{-10k}$,

在 $y=kx+2$ 中, 令 $y=0$, 得 $x_M=-\frac{2}{k}$.

由题意得 $N(0, -1)$, 所以直线 MN 的斜率为 $-\frac{k}{2}$.

由 $OP \perp MN$, 得 $\frac{4-5k^2}{-10k} \cdot \left(-\frac{k}{2}\right) = -1$,

化简得 $k^2 = \frac{24}{5}$, 从而 $k = \pm \frac{2\sqrt{30}}{5}$.

所以, 直线 PB 的斜率为 $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 或 $-\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

【点睛】 本题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识. 考查用代数方法研究圆锥曲线的性质. 考查运算求解能力, 以及用方程思想解决问题的能力.

19. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列. 已知 $a_1 = 4, b_1 = 6, b_2 = 2a_2 - 2, b_3 = 2a_3 + 4$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = 1, c_n = \begin{cases} 1, & 2^k < n < 2^{k+1}, \\ b_k, & n = 2^k, \end{cases}$ 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

(i) 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式;

(ii) 求 $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

【答案】 (I) $a_n = 3n + 1; b_n = 3 \times 2^n$ (II) (i) $a_{2^n}(c_{2^n} - 1) = 9 \times 4^n - 1$ (ii)

$$\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i \quad (n \in \mathbf{N}^*) = 27 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-1} - n - 12 \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

【解析】

【分析】

(I) 由题意首先求得公比和公差, 然后确定数列的通项公式即可;

(II) 结合 (I) 中的结论可得数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式, 结合所得的通项公式对所求的数列通项公式进

行等价变形, 结合等比数列前 n 项和公式可得 $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i$ 的值.

【详解】 (I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q .

$$\text{依题意得} \begin{cases} 6q = 2(4+d) - 2 = 6 + 2d \\ 6q^2 = 2(4+2d) + 4 = 12 + 4d \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} d = 3 \\ q = 2 \end{cases},$$

故 $a_n = 4 + (n-1) \times 3 = 3n + 1, b_n = 6 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n$.

所以, $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n + 1$, $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 3 \times 2^n$.

$$(II) (i) a_{2^n} (c_{2^n} - 1) = a_{2^n} (b_n - 1) = (3 \times 2^n + 1)(3 \times 2^n - 1) = 9 \times 4^n - 1.$$

所以, 数列 $\{a_{2^n} (c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式为 $a_{2^n} (c_{2^n} - 1) = 9 \times 4^n - 1$.

$$\begin{aligned} (ii) \sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i &= \sum_{i=1}^{2^n} [a_i + a_i (c_i - 1)] = \sum_{i=1}^{2^n} a_i + \sum_{i=1}^{2^n} a_{2^i} (c_{2^i} - 1) \\ &= \left(2^n \times 4 + \frac{2^n (2^n - 1)}{2} \times 3 \right) + \sum_{i=1}^n (9 \times 4^i - 1) \\ &= (3 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-1}) + 9 \times \frac{4(1-4^n)}{1-4} - n \\ &= 27 \times 2^{2n-1} + 5 \times 2^{n-1} - n - 12 \quad (n \in N^*). \end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前 n 项和公式等基础知识. 考查化归与转化思想和数列求和的基本方法以及运算求解能力.

20. 设函数 $f(x) = e^x \cos x$, $g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ 时, 证明 $f(x) + g(x) \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \geq 0$;

(III) 设 x_n 为函数 $u(x) = f(x) - 1$ 在区间 $\left(2m\pi + \frac{\pi}{4}, 2m\pi + \frac{\pi}{2} \right)$ 内的零点, 其中 $n \in N$, 证明

$$2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}.$$

【答案】 (I) 单调递增区间为 $\left[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4} \right] (k \in Z)$, $f(x)$ 的单调递减区间为

$\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \right] (k \in Z)$. (II) 见证明; (III) 见证明

【解析】

【分析】

(I) 由题意求得导函数的解析式, 然后由导函数的符号即可确定函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 构造函数 $h(x) = f(x) + g(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, 结合 (I) 的结果和导函数的符号求解函数 $h(x)$ 的最小值即可证得题中的结论;

可证得题中的结论;

(III) 令 $y_n = x_n - 2n\pi$, 结合 (I), (II) 的结论、函数的单调性和零点的性质放缩不等式即可证得题中的结果.

【详解】 (I) 由已知, 有 $f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$.

当 $x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right) (k \in Z)$ 时, 有 $\sin x > \cos x$, 得 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in \left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) (k \in Z)$ 时, 有 $\sin x < \cos x$, 得 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增.

所以, $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) (k \in Z)$,

$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right) (k \in Z)$.

(II) 记 $h(x) = f(x) + g(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. 依题意及 (I) 有: $g(x) = e^x(\cos x - \sin x)$,

从而 $g'(x) = -2e^x \sin x$. 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$, 故

$h'(x) = f'(x) + g'(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + g(x)(-1) = g'(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < 0$.

因此, $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 进而 $h(x) \dots h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

所以, 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) + g(x)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \dots 0$.

(III) 依题意, $u(x_n) = f(x_n) - 1 = 0$, 即 $e^{x_n} \cos x_n = 1$.

记 $y_n = x_n - 2n\pi$, 则 $y_n \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

且 $f(y_n) = e^{y_n} \cos y_n = e^{x_n - 2n\pi} \cos(x_n - 2n\pi) = e^{-2n\pi} (n \in N)$.

由 $f(y_n) = e^{-2n\pi}$, $1 = f(y_0)$ 及 (I) 得 $y_n < y_0$.

由 (II) 知, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数,

因此 $g(y_n) > g(y_0) < g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

又由 (II) 知 $f(y_n) + g(y_n)\left(\frac{\pi}{2} - y_n\right) > 0$, 故:

$$\frac{\pi}{2} - y_n > -\frac{f(y_n)}{g(y_n)} = -\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_n)} > -\frac{e^{-2n\pi}}{g(y_0)} = \frac{e^{-2n\pi}}{e^{y_0}(\sin y_0 - \cos y_0)} < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}.$$

所以 $2n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n < \frac{e^{-2n\pi}}{\sin x_0 - \cos x_0}$.

【点睛】 本题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法. 考查函数思想和化归与转化思想. 考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力.