

2006 年河南高考文科数学真题及答案

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. (5 分) 已知向量 \vec{a} 、 \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=1$ ， $|\vec{b}|=4$ ，且 $\vec{a} \cdot \vec{b}=2$ ，则 \vec{a} 与 \vec{b} 夹角为 ()
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$
2. (5 分) 设集合 $M=\{x|x^2-x<0\}$ ， $N=\{x||x|<2\}$ ，则 ()
- A. $M \cap N = \emptyset$ B. $M \cap N = M$ C. $M \cup N = M$ D. $M \cup N = \mathbb{R}$
3. (5 分) 已知函数 $y=e^x$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，则 ()
- A. $f(2x) = e^{2x}$ ($x \in \mathbb{R}$) B. $f(2x) = \ln 2 \cdot \ln x$ ($x > 0$)
- C. $f(2x) = 2e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) D. $f(2x) = \ln x + \ln 2$ ($x > 0$)
4. (5 分) 双曲线 $mx^2 + y^2 = 1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍，则 $m =$ ()
- A. $-\frac{1}{4}$ B. -4 C. 4 D. $\frac{1}{4}$
5. (5 分) 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_5 = 35$ ，则 $a_4 =$ ()
- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5
6. (5 分) 函数 $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ 的单调增区间为 ()
- A. $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$ B. $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
- C. $(k\pi - \frac{3\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$ D. $(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$
7. (5 分) 从圆 $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$ 外一点 $P(3, 2)$ 向这个圆作两条切线，则两切线夹角的余弦值为 ()
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 0
8. (5 分) $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，若 a 、 b 、 c 成等比数列，且 $c=2a$ ，则 $\cos B =$ ()
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
9. (5 分) 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4，体积为 16，则这个球的表面积是 ()
- A. 16π B. 20π C. 24π D. 32π

10. (5分) 在 $(x - \frac{1}{2x})^{10}$ 的展开式中, x^4 的系数为 ()
- A. -120 B. 120 C. -15 D. 15
11. (5分) 抛物线 $y = -x^2$ 上的点到直线 $4x + 3y - 8 = 0$ 距离的最小值是 ()
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{8}{5}$ D. 3
12. (5分) 用长度分别为 2、3、4、5、6 (单位: cm) 的 5 根细木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 能够得到的三角形的最大面积为 ()
- A. $8\sqrt{5} \text{ cm}^2$ B. $6\sqrt{10} \text{ cm}^2$ C. $3\sqrt{55} \text{ cm}^2$ D. 20 cm^2

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)

13. (4分) 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{2^x + 1}$, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. (4分) 已知正四棱锥的体积为 12, 底面对角线长为 $2\sqrt{6}$, 则侧面与底面所成的二面角等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ °.
15. (4分) 设 $z = 2y - x$, 式中变量 x, y 满足下列条件:
$$\begin{cases} 2x - y \geq -1 \\ 3x + 2y \leq 23 \\ y \geq 1 \end{cases}$$
, 则 z 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
16. (4分) 安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班, 每人值班一天, 其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日, 不同的安排方法共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 种 (用数字作答).

三、解答题 (共 6 小题, 满分 74 分)

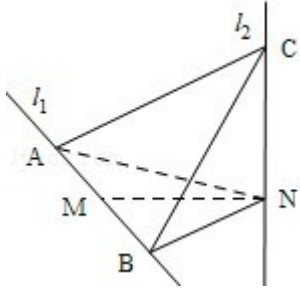
17. (12分) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_3 = 2$, $a_2 + a_4 = \frac{20}{3}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
18. (12分) ABC 的三个内角为 A、B、C, 求当 A 为何值时, $\cos A + 2\cos \frac{B+C}{2}$ 取得最大值, 并求出这个最大值.
19. (12分) A、B 是治疗同一种疾病的两种药, 用若干试验组进行对比试验. 每个试验组由 4 只小白鼠组成, 其中 2 只服用 A, 另 2 只服用 B, 然后观察疗效. 若在一个试验组中, 服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多, 就称该试验组为甲类组. 设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\frac{2}{3}$, 服用 B 有效的概率为 $\frac{1}{2}$.
- (I) 求一个试验组为甲类组的概率;
- (II) 观察 3 个试验组, 用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望.

望.

20. (12分) 如图, l_1 、 l_2 是互相垂直的异面直线, MN 是它们的公垂线段. 点 A 、 B 在 l_1 上, C 在 l_2 上, $AM=MB=MN$.

(I) 证明 $AC \perp NB$;

(II) 若 $\angle ACB=60^\circ$, 求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值.



21. (12分) 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$) 短轴的一个端点, Q 为椭圆上一个动点, 求 $|PQ|$ 的最大值.

22. (14分) 设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 都是增函数, 求 a 的取值范围.

2006 年河南高考文科数学真题参考答案

一、选择题 (共 12 小题, 每小题 5 分, 满分 60 分)

1. (5分) (2006·全国卷 I) 已知向量 \vec{a} 、 \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b}=2$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

【分析】本题是对向量数量积的考查, 根据两个向量的夹角和模之间的关系, 用数量积列出等式, 变化出夹角的余弦表示式, 代入给出的数值, 求出余弦值, 注意向量夹角的范围, 求出适合的角.

【解答】解: \because 向量 a 、 b 满足 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=4$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b}=2$,

设 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2},$$

$\because \theta \in [0, \pi]$,

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3},$$

故选 C.

2. (5分) (2006•全国卷 I) 设集合 $M = \{x | x^2 - x < 0\}$, $N = \{x | |x| < 2\}$, 则 ()

A. $M \cap N = \emptyset$ B. $M \cap N = M$ C. $M \cup N = M$ D. $M \cup N = \mathbb{R}$

【分析】 M、N 分别是二次不等式和绝对值不等式的解集，分别解出再求交集合并集.

【解答】 解：集合 $M = \{x | x^2 - x < 0\} = \{x | 0 < x < 1\}$, $N = \{x | |x| < 2\} = \{x | -2 < x < 2\}$, $\therefore M \cap N = M$,

故选：B.

3. (5分) (2006•全国卷 I) 已知函数 $y = e^x$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称，则 ()

A. $f(2x) = e^{2x} (x \in \mathbb{R})$ B. $f(2x) = \ln 2 \cdot \ln x (x > 0)$

C. $f(2x) = 2e^x (x \in \mathbb{R})$ D. $f(2x) = \ln x + \ln 2 (x > 0)$

【分析】 本题考查反函数的概念、互为反函数的函数图象的关系、求反函数的方法等相关知识和方法.

根据函数 $y = e^x$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称可知 $f(x)$ 是 $y = e^x$ 的反函数，由此可得 $f(x)$ 的解析式，进而获得 $f(2x)$.

【解答】 解：函数 $y = e^x$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称，

所以 $f(x)$ 是 $y = e^x$ 的反函数，即 $f(x) = \ln x$,

$$\therefore f(2x) = \ln 2x = \ln x + \ln 2 (x > 0),$$

选 D.

4. (5分) (2006•全国卷 I) 双曲线 $mx^2 + y^2 = 1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍，则 $m =$ ()

A. $-\frac{1}{4}$ B. -4 C. 4 D. $\frac{1}{4}$

【分析】 由双曲线 $mx^2 + y^2 = 1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍，可求出该双曲线的方程，从而求出 m 的值.

【解答】 解：双曲线 $mx^2 + y^2 = 1$ 的虚轴长是实轴长的 2 倍，

$\therefore m < 0$, 且双曲线方程为 $-\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

$\therefore m = -\frac{1}{4}$,

故选: A.

5. (5分) (2006•全国卷 I) 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_7 = 35$, 则 $a_4 =$ ()

A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

【分析】充分运用等差数列前 n 项和与某些特殊项之间的关系解题.

【解答】解: S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \times 7 = 7a_4 = 35$,

$\therefore a_4 = 5$,

故选 D.

6. (5分) (2006•全国卷 I) 函数 $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ 的单调增区间为 ()

A. $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$ B. $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

C. $(k\pi - \frac{3\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$ D. $(k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{3\pi}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$

【分析】先利用正切函数的单调性求出函数单调增时 $x + \frac{\pi}{4}$ 的范围 i , 进而求得 x 的范围.

【解答】解: 函数 $f(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$ 的单调增区间满足 $k\pi - \frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}$,

\therefore 单调增区间为 $(k\pi - \frac{3\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4})$, $k \in \mathbb{Z}$,

故选 C

7. (5分) (2006•全国卷 I) 从圆 $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$ 外一点 $P(3, 2)$ 向这个圆作两条切线, 则两切线夹角的余弦值为 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 0

【分析】先求圆心到 P 的距离, 再求两切线夹角一半的三角函数值, 然后求出结果.

【解答】解: 圆 $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$ 的圆心为 $M(1, 1)$, 半径为 1, 从外一点 $P(3, 2)$ 向这个圆作两条切线,

则点 P 到圆心 M 的距离等于 $\sqrt{5}$, 每条切线与 PM 的夹角的正切值等于 $\frac{1}{2}$,

所以两切线夹角的正切值为 $\tan \theta = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$, 该角的余弦值等于 $\frac{3}{5}$,

故选 B.

8. (5分) (2006•全国卷 I) $\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c, 若 a、b、c 成等比数列, 且 $c=2a$, 则 $\cos B =$ ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【分析】根据等比数列的性质, 可得 $b=\sqrt{2}a$, 将 c、b 与 a 的关系结合余弦定理分析可得答案.

【解答】解: $\triangle ABC$ 中, a、b、c 成等比数列, 则 $b^2=ac$,

由 $c=2a$, 则 $b=\sqrt{2}a$,

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + 4a^2 - 2a^2}{4a^2} = \frac{3}{4},$$

故选 B.

9. (5分) (2006•全国卷 I) 已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4, 体积为 16, 则这个球的表面积是 ()

- A. 16π B. 20π C. 24π D. 32π

【分析】先求正四棱柱的底面边长, 然后求其对角线, 就是球的直径, 再求其表面积.

【解答】解: 正四棱柱高为 4, 体积为 16, 底面积为 4, 正方形边长为 2,

正四棱柱的对角线长即球的直径为 $2\sqrt{6}$,

\therefore 球的半径为 $\sqrt{6}$, 球的表面积是 24π ,

故选 C.

10. (5分) (2006•全国卷 I) 在 $(x - \frac{1}{2x})^{10}$ 的展开式中, x^4 的系数为 ()

- A. -120 B. 120 C. -15 D. 15

【分析】利用二项展开式的通项公式求出第 r+1 项, 令 x 的指数为 4 求出 x^4 的系数

【解答】解: 在 $(x - \frac{1}{2x})^{10}$ 的展开式中

$$x^4 \text{项是 } C_{10}^3 (x)^7 \left(-\frac{1}{2x}\right)^3 = -15x^4,$$

故选项为 C.

11. (5分) (2006•全国卷 I) 抛物线 $y = -x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 距离的最小值是 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{8}{5}$ D. 3

【分析】设抛物线 $y = -x^2$ 上一点为 $(m, -m^2)$, 该点到直线 $4x+3y-8=0$ 的距离为

$$\frac{|4m - 3m^2 - 8|}{5}, \text{ 由此能够得到所求距离的最小值.}$$

【解答】解: 设抛物线 $y = -x^2$ 上一点为 $(m, -m^2)$,

$$\text{该点到直线 } 4x+3y-8=0 \text{ 的距离为 } \frac{|4m - 3m^2 - 8|}{5},$$

分析可得, 当 $m = \frac{2}{3}$ 时, 取得最小值为 $\frac{4}{3}$,

故选 B.

12. (5分) (2006•全国卷 I) 用长度分别为 2、3、4、5、6 (单位: cm) 的 5 根细木棒围成一个三角形 (允许连接, 但不允许折断), 能够得到的三角形的最大面积为 ()

- A. $8\sqrt{5} \text{ cm}^2$ B. $6\sqrt{10} \text{ cm}^2$ C. $3\sqrt{55} \text{ cm}^2$ D. 20 cm^2

【分析】设三角形的三边分别为 a, b, c , 令 $p = \frac{a+b+c}{2}$, 则 $p=10$. 海伦公式 $S =$

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{10 \left[\frac{(10-a)+(10-b)+(10-c)}{3} \right]^3} = \frac{100\sqrt{3}}{9} \text{ 故排除 C, D,}$$

由于等号成立的条件为 $10-a=10-b=10-c$, 故“=”不成立, 推测当三边长相等时面积最大, 故考虑当 a, b, c 三边长最接近时面积最大, 进而得到答案.

【解答】解: 设三角形的三边分别为 a, b, c ,

$$\text{令 } p = \frac{a+b+c}{2}, \text{ 则 } p=10. \text{ 由海伦公式 } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{知 } S = \sqrt{10(10-a)(10-b)(10-c)} \leq \sqrt{10 \left[\frac{(10-a)+(10-b)+(10-c)}{3} \right]^3} = \frac{100\sqrt{3}}{9} < 20 < 3$$

$$\sqrt{55}$$

由于等号成立的条件为 $10 - a = 10 - b = 10 - c$ ，故“=”不成立，

$$\therefore S < 20 < \sqrt[3]{55}.$$

排除 C, D.

由以上不等式推测，当三边长相等时面积最大，故考虑当 a, b, c 三边长最接近时面积最大，此时三边长为 7, 7, 6，用 2、5 连接，3、4 连接各为一边，第三边长为 7 组成三角形，此三角形面积最大，面积为 $6\sqrt{10} \text{ cm}^2$ ，

故选 B.

二、填空题（共 4 小题，每小题 4 分，满分 16 分）

13. (4 分) (2006·全国卷 I) 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{2^x + 1}$ ，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $a = \frac{1}{2}$ 。

【分析】因为 $f(x)$ 为奇函数，而在 $x=0$ 时， $f(x)$ 有意义，利用 $f(0) = 0$ 建立方程，求出参数 a 的值。

【解答】解：函数 $f(x) = a - \frac{1}{2^x + 1}$ 。若 $f(x)$ 为奇函数，

则 $f(0) = 0$ ，

$$\text{即 } a - \frac{1}{2^0 + 1} = 0, \quad a = \frac{1}{2}.$$

故答案为 $\frac{1}{2}$

14. (4 分) (2006·全国卷 I) 已知正四棱锥的体积为 12，底面对角线长为 $2\sqrt{6}$ ，则侧面与底面所成的二面角等于 60° 。

【分析】先根据底面对角线长求出边长，从而求出底面积，再由体积求出正四棱锥的高，求出侧面与底面所成的二面角的平面角的正切值即可。

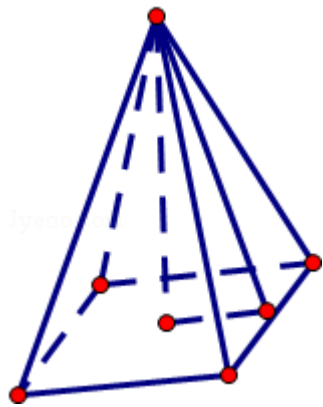
【解答】解：正四棱锥的体积为 12，底面对角线的长为 $2\sqrt{6}$ ，底面边长为 $2\sqrt{3}$ ，底面积为 12，

所以正四棱锥的高为 3，

则侧面与底面所成的二面角的正切 $\tan \alpha = \sqrt{3}$ ，

\therefore 二面角等于 60° ，

故答案为 60°



15. (4分) (2006•全国卷 I) 设 $z=2y-x$, 式中变量 x, y 满足下列条件:
$$\begin{cases} 2x-y \geq -1 \\ 3x+2y \leq 23 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

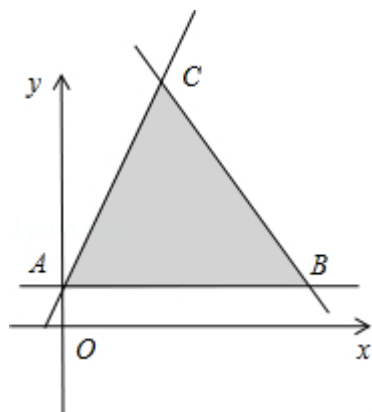
则 z 的最大值为 11.

【分析】先根据约束条件画出可行域, 再利用几何意义求最值, $z=2y-x$ 表示直线在 y 轴上的截距, 只需求出可行域直线在 y 轴上的截距最大值即可.

【解答】解:
$$\begin{cases} 2x-y \geq -1 \\ 3x+2y \leq 23 \\ y \geq 1 \end{cases}$$
, 在坐标系中画出图象,

三条线的交点分别是 $A(0, 1), B(7, 1), C(3, 7)$,

在 $\triangle ABC$ 中满足 $z=2y-x$ 的最大值是点 C , 代入得最大值等于 11.



故填: 11.

16. (4分) (2006•全国卷 I) 安排 7 位工作人员在 5 月 1 日至 5 月 7 日值班, 每人值班一天, 其中甲、乙二人都不安排在 5 月 1 日和 2 日. 不同的安排方法共有 2400 种 (用数字作答).

【分析】本题是一个分步计数问题，先安排甲、乙两人在假期的后 5 天值班，有 A_5^2 种排法，其余 5 人再进行排列，有 A_5^5 种排法，根据分步计数原理得到结果.

【解答】解：由题意知本题是一个分步计数问题，
首先安排甲、乙两人在假期的后 5 天值班，有 $A_5^2=20$ 种排法，
其余 5 人再进行排列，有 $A_5^5=120$ 种排法，
∴根据分步计数原理知共有 $20 \times 120=2400$ 种安排方法.
故答案为：2400

三、解答题（共 6 小题，满分 74 分）

17. (12 分) (2006•全国卷 I) 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列， $a_3=2$ ， $a_2+a_4=\frac{20}{3}$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【分析】首先设出等比数列的公比为 q ，表示出 a_2 ， a_4 ，利用两者之和为 $\frac{20}{3}$ ，求出公比 q 的两个值，利用其两个值分别求出对应的首项 a_1 ，最后利用等比数列的通项公式得到即可.

【解答】解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则 $q \neq 0$ ， $a_2 = \frac{a_3}{q} = \frac{2}{q}$ ， $a_4 = a_3 q = 2q$

$$\text{所以 } \frac{2}{q} + 2q = \frac{20}{3},$$

$$\text{解得 } q_1 = \frac{1}{3}, q_2 = 3,$$

$$\text{当 } q_1 = \frac{1}{3}, a_1 = 18.$$

$$\text{所以 } a_n = 18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{18}{3^{n-1}} = 2 \times 3^{3-n}.$$

$$\text{当 } q=3 \text{ 时, } a_1 = \frac{2}{9},$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{2}{9} \times 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-3}.$$

18. (12 分) (2006•全国卷 I) $\triangle ABC$ 的三个内角为 A 、 B 、 C ，求当 A 为何值时， $\cos A + 2\cos \frac{B+C}{2}$ 取得最大值，并求出这个最大值.

【分析】利用三角形中内角和为 π ，将三角函数变成只含角 A ，再利用三角函数的二倍角公

式将函数化为只含角 $\frac{A}{2}$ ，利用二次函数的最值求出最大值

【解答】解：由 $A+B+C=\pi$ ，得 $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$ ，

所以有 $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$ 。

$$\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}=\cos A+2\sin\frac{A}{2}=1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}$$

$$=-2\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

当 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ ，即 $A=\frac{\pi}{3}$ 时， $\cos A+2\cos\frac{B+C}{2}$ 取得最大值为 $\frac{3}{2}$

故最大值为 $\frac{3}{2}$

19. (12分) (2006•全国卷 I) A、B 是治疗同一种疾病的两种药，用若干试验组进行对比试验。每个试验组由 4 只小白鼠组成，其中 2 只服用 A，另 2 只服用 B，然后观察疗效。若在一个试验组中，服用 A 有效的小白鼠的只数比服用 B 有效的多，就称该试验组为甲类组。设每只小白鼠服用 A 有效的概率为 $\frac{2}{3}$ ，服用 B 有效的概率为 $\frac{1}{2}$ 。

(I) 求一个试验组为甲类组的概率；

(II) 观察 3 个试验组，用 ξ 表示这 3 个试验组中甲类组的个数，求 ξ 的分布列和数学期望。

【分析】(1) 由题意知本题是一个独立重复试验，根据所给的两种药物对小白鼠有效的概率，计算出小白鼠有效的只数的概率，对两种药物有效的小白鼠进行比较，得到甲类组的概率。

(2) 由题意知本试验是一个甲类组的概率不变，实验的条件不变，可以看做是一个独立重复试验，所以变量服从二项分布，根据二项分布的性质写出分布列和期望。

【解答】解：(1) 设 A_i 表示事件“一个试验组中，服用 A 有效的小鼠有 i 只”， $i=0, 1, 2$ ，

B_i 表示事件“一个试验组中，服用 B 有效的小鼠有 i 只”， $i=0, 1, 2$ ，

$$\text{依题意有：} P(A_1)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}, P(A_2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}, P(B_0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P(B_1)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \text{ 所求概率为：}$$

$$P=P(B_0\cdot A_1)+P(B_0\cdot A_2)+P(B_1\cdot A_2)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4+1}{9} \times \frac{4+1}{4} \times \frac{4+1}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

(II) ξ 的可能值为 0, 1, 2, 3 且 $\xi \sim B(3, \frac{4}{9})$.

$$P(\xi=0) = (\frac{5}{9})^3 = \frac{125}{729}$$

$$P(\xi=1) = C_3^1 \times \frac{4}{9} \times (\frac{5}{9})^2 = \frac{100}{243}$$

$$P(\xi=2) = C_3^2 \times (\frac{4}{9})^2 \times \frac{5}{9} = \frac{80}{243}$$

$$P(\xi=3) = (\frac{4}{9})^3 = \frac{64}{729}$$

$\therefore \xi$ 的分布列为:

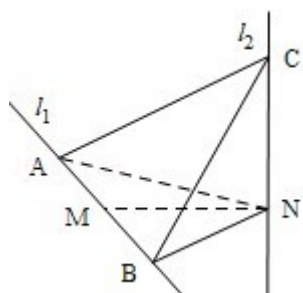
ξ	0	1	2	3
P	$\frac{125}{729}$	$\frac{100}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{64}{729}$

$$\therefore \text{数学期望 } E\xi = 3 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$$

20. (12分) (2006·全国卷 I) 如图, l_1 、 l_2 是互相垂直的异面直线, MN 是它们的公垂线段. 点 A、B 在 l_1 上, C 在 l_2 上, $AM=MB=MN$.

(I) 证明 $AC \perp NB$;

(II) 若 $\angle ACB=60^\circ$, 求 NB 与平面 ABC 所成角的余弦值.



【分析】(1) 欲证 $AC \perp NB$, 可先证 $BN \perp$ 面 ACN , 根据线面垂直的判定定理只需证 $AN \perp BN$, $CN \perp BN$ 即可;

(2) 易证 N 在平面 ABC 内的射影 H 是正三角形 ABC 的中心, 连接 BH, $\angle NBH$ 为 NB 与平面 ABC 所成的角, 在 $Rt\triangle NHB$ 中求出此角即可.

【解答】解: (I) 由已知 $l_2 \perp MN$, $l_2 \perp l_1$, $MN \cap l_1=M$, 可得 $l_2 \perp$ 平面 ABN .

由已知 $MN \perp l_1$, $AM=MB=MN$,

可知 $AN=NB$ 且 $AN \perp NB$.

又 AN 为 AC 在平面 ABN 内的射影.

$\therefore AC \perp NB$

(II) $\because AM=MB=MN$, MN 是它们的公垂线段,

由中垂线的性质可得 $AN=BN$,

$\therefore \text{Rt}\triangle CAN \cong \text{Rt}\triangle CNB$,

$\therefore AC=BC$, 又已知 $\angle ACB=60^\circ$,

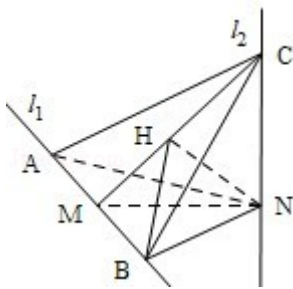
因此 $\triangle ABC$ 为正三角形.

$\therefore \text{Rt}\triangle ANB \cong \text{Rt}\triangle CNB$,

$\therefore NC=NA=NB$, 因此 N 在平面 ABC 内的射影 H 是正三角形 ABC 的中心,

连接 BH, $\angle NBH$ 为 NB 与平面 ABC 所成的角.

在 $\text{Rt}\triangle NHB$ 中, $\cos \angle NBH = \frac{HB}{NB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}AB} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



21. (12分) (2006·全国卷 I) 设 P 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$) 短轴的一个端点, Q 为椭圆

上一个动点, 求 $|PQ|$ 的最大值.

【分析】 依题意可知 $|PQ| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$, 因为 Q 在椭圆上, 所以 $x^2 = a^2(1-y^2)$, $|PQ|^2 = a^2$

$$(1-y^2) + y^2 - 2y + 1 = (1-a^2)y^2 - 2y + 1 + a^2$$

$$= (1-a^2)\left(y - \frac{1}{1-a^2}\right)^2 - \frac{1}{1-a^2} + 1 + a^2. \text{ 由此分类讨论进行求解.}$$

【解答】 解: 由已知得到 P(0, 1) 或 P(0, -1)

由于对称性, 不妨取 P(0, 1)

设 Q(x, y) 是椭圆上的任一点,

$$\text{则 } |PQ| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}, \quad \textcircled{1}$$

又因为 Q 在椭圆上,

所以, $x^2=a^2(1-y^2)$,

$$|PQ|^2=a^2(1-y^2)+y^2-2y+1=(1-a^2)y^2-2y+1+a^2$$

$$=(1-a^2)\left(y-\frac{1}{1-a^2}\right)^2-\frac{1}{1-a^2}+1+a^2. \quad ②$$

因为 $|y| \leq 1$, $a > 1$, 若 $a \geq \sqrt{2}$, 则 $\left|\frac{1}{1-a^2}\right| \leq 1$,

所以如果它包括对称轴的 x 的取值, 那么就是顶点上取得最大值,

即当 $-1 \leq \frac{1}{1-a^2} < 0$ 时,

在 $y = \frac{1}{1-a^2}$ 时, $|PQ|$ 取最大值 $\frac{a^2\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}$;

如果对称轴不在 y 的取值范围内的话, 那么根据图象给出的单调性来求解.

即当 $\frac{1}{1-a^2} < -1$ 时, 则当 $y = -1$ 时, $|PQ|$ 取最大值 2.

22. (14分) (2006•全国卷 I) 设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 都是增函数, 求 a 的取值范围.

【分析】先对函数 $f(x)$ 进行求导得到一个二次函数, 根据二次函数的图象和性质令 $f'(x) \geq 0$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 成立, 解出 a 的值.

【解答】解: $f'(x) = 3x^2 - 2ax + (a^2 - 1)$, 其判别式 $\Delta = 4a^2 - 12a^2 + 12 = 12 - 8a^2$.

(i) 若 $\Delta = 12 - 8a^2 = 0$, 即 $a = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$, 当 $x \in (-\infty, \frac{a}{3})$, 或 $x \in (\frac{a}{3}, +\infty)$ 时,

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为增函数.

所以 $a = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$.

(ii) 若 $\Delta = 12 - 8a^2 < 0$, 恒有 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 为增函数,

所以 $a^2 > \frac{3}{2}$,

即 $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty)$

(iii) 若 $\Delta = 12 - 8a^2 > 0$, 即 $-\frac{\sqrt{6}}{2} < a < \frac{\sqrt{6}}{2}$,

令 $f'(x) = 0$,

$$\text{解得 } x_1 = \frac{a - \sqrt{3 - 2a^2}}{3}, \quad x_2 = \frac{a + \sqrt{3 - 2a^2}}{3}.$$

当 $x \in (-\infty, x_1)$, 或 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数;

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数. 依题意 $x_1 \geq 0$ 且 $x_2 \leq 1$.

$$\text{由 } x_1 \geq 0 \text{ 得 } a \geq \sqrt{3 - 2a^2}, \text{ 解得 } 1 \leq a < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{由 } x_2 \leq 1 \text{ 得 } \sqrt{3 - 2a^2} \leq 3 - a, \text{ 解得 } -\frac{\sqrt{6}}{2} < a < \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 从而 } a \in [1, \frac{\sqrt{6}}{2})$$

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty) \cup [1, \frac{\sqrt{6}}{2})$,

$$\text{即 } a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}] \cup [1, +\infty).$$