

文科数学

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,共150分.考试用时120分钟.
第I卷1至2页,第II卷3至5页.

第I卷

参考公式:

如果事件 A, B 互斥,那么

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

·棱柱的体积公式 $V = Sh$,

其中 S 表示棱柱的底面面积, h 表示棱柱的高.

·如果事件 A, B 相互独立,那么

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

·球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

其中 R 表示球的半径.

一. 选择题: 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1) 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $(-\infty, 2]$ (B) $[1, 2]$ (C) $[-2, 2]$ (D) $[-2, 1]$

(2) 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x + y - 6 \geq 0, \\ x - y - 2 \leq 0, \\ y - 3 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = y - 2x$ 的最小值为

- (A) -7 (B) -4
(C) 1 (D) 2

(3) 阅读右边的程序框图, 运行相应的程序, 则输出 n 的值为

(A) 7 (B) 6

(C) 5 (D) 4

(4) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $(a-b)a^2 < 0$ ” 是 “ $a < b$ ” 的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(5) 已知过点 $P(2,2)$ 的直线与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 5$ 相切, 且与直线 $ax - y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a =$

(A) $-\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) 2

(D) $\frac{1}{2}$

(6) 函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值是

(A) -1

(B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) 0

(7) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 若实数 a 满足 $f(\log_2 a) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) \leq 2f(1)$, 则 a 的取值范围是

(A) $[1, 2]$

(B) $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

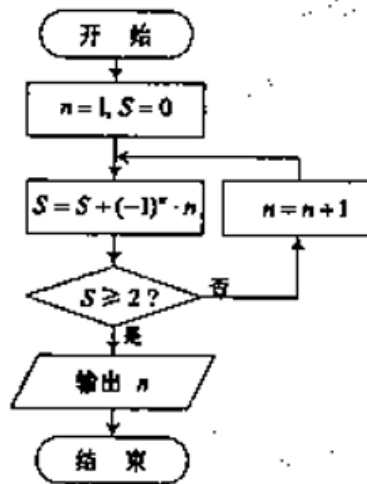
(C) $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

(D) $(0, 2]$

(8) 设函数 $f(x) = e^x + x - 2, g(x) = \ln x + x^2 - 3$. 若实数 a, b 满足 $f(a) = 0, g(b) = 0$, 则

(A) $g(a) < 0 < f(b)$ (B) $f(b) < 0 < g(a)$

(C) $0 < g(a) < f(b)$ (D) $f(b) < g(a) < 0$



第II卷

注意事项:

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.
2. 本卷共12小题, 共110分.

二. 填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分.

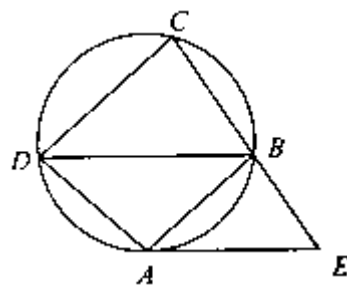
(9) i 是虚数单位. 复数 $(3 + i)(1 - 2i) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 已知一个正方体的所有顶点在一个球面上. 若球的体积为 $\frac{9\pi}{2}$, 则正方体的棱长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 已知抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点, 且双曲线的离心率为2, 则该双曲线的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD = 1$, $\angle BAD = 60^\circ$, E 为 CD 的中点. 若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE} = 1$, 则 AB 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 如图, 在圆内接梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, 过点 A 作圆的切线与 CB 的延长线交于点 E . 若 $AB = AD = 5$, $BE = 4$, 则弦 BD 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



(14) 设 $a + b = 2$, $b > 0$, 则 $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三. 解答题: 本大题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分13分)

某产品的三个质量指标分别为 x , y , z , 用综合指标 $S = x + y + z$ 评价该产品的等级. 若 $S \leq 4$, 则该产品为一等品. 现从一批该产品中, 随机抽取10件产品作为样本, 其质量指标列表如下:

| | | | | | |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 产品编号 | A_1 | A_2 | A_3 | A_4 | A_5 |
| 质量指标 (x, y, z) | $(1, 1, 2)$ | $(2, 1, 1)$ | $(2, 2, 2)$ | $(1, 1, 1)$ | $(1, 2, 1)$ |
| 产品编号 | A_6 | A_7 | A_8 | A_9 | A_{10} |
| 质量指标 (x, y, z) | $(1, 2, 2)$ | $(2, 1, 1)$ | $(2, 2, 1)$ | $(1, 1, 1)$ | $(2, 1, 2)$ |

(I) 利用上表提供的样本数据估计该批产品的一等品率;

(II) 在该样品的一等品中, 随机抽取2件产品,

(1.) 用产品编号列出所有可能的结果;

(2.) 设事件 B 为 “在取出的2件产品中, 每件产品的综合指标 S 都等于4”, 求事件 B 发生的概率.

(16) (本小题满分13分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $b \sin A = 3c \sin B, a = 3, \cos B = \frac{2}{3}$.

(I) 求 b 的值;

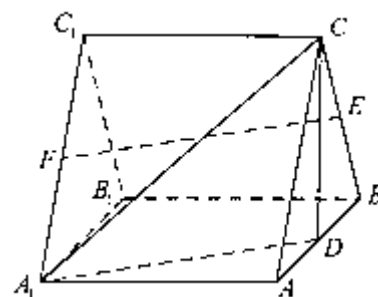
(II) 求 $\sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

(17) (本小题满分13分)

如图,

三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,

侧棱 $A_1A \perp$ 底面 ABC , 且各棱长均相等. D, E, F 分别为棱 AB, BC, A_1C_1 的中点.



(I) 证明 $EF \parallel$ 平面 A_1CD ;

(II) 证明平面 $A_1CD \perp$ 平面 A_1ABB_1 ;

(III) 求直线 BC 与平面 A_1CD 所成角的正弦值.

(18) (本小题满分13分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ,

离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(I) 求椭圆的方程;

(II) 设 A, B 分别为椭圆的左,右顶点, 过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点. 若 $\overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{CB} = 8$, 求 k 的值.

(19) (本小题满分14分)

已知首项为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $-2S_2, S_3, 4S_4$ 成等差数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 证明 $S_n + \frac{1}{S_n} \leq \frac{13}{6} (n \in \mathbf{N}^*)$.

(20) (本小题满分14分)

设 $a \in [-2, 0]$, 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - (a+5)x, & x \leq 0, \\ x^3 - \frac{a+3}{2}x^2 + ax, & x > 0. \end{cases}$

(I) 证明 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递增;

(II) 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $P_i(x_i, f(x_i)) (i=1, 2, 3)$ 处的切线相互平行, 且 $x_1 x_2 x_3 \neq 0$, 证明 $x_1 + x_2 + x_3 > \frac{1}{3}$.

数学（文史类）参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基础运算。每小题5分。满分40分。

- (1) D (2) A (3) D (4) A
 (5) C (6) B (7) C (8) A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。每小题5分，满分30分。

- (9) $5-5i$ (10) $\sqrt{3}$ (11) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$
 (12) $\frac{1}{2}$ (13) $\frac{15}{2}$ (14) $\frac{3}{4}$

三、解答题

(15) 本小题主要考查样本估计总体的方法、用列举法计算随机事件所含的基本事件数、古典概型及其概率计算公式等基础知识。考查数据处理能力和运用概率知识解决简单问题的能力。满分13分。

(I) 解：计算10件产品的综合指标S，如下表：

| 产品编号 | A_1 | A_2 | A_3 | A_4 | A_5 | A_6 | A_7 | A_8 | A_9 | A_{10} |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| S | 4 | 4 | 6 | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 3 | 5 |

其中 $S \leq 4$ 的有 $A_1, A_2, A_4, A_5, A_7, A_9$ ，共6件，故该样本的一等品率为 $\frac{6}{10} = 0.6$ ，

从而可估计该批产品的一等品率为0.6.

(II)

(i) 解：在该样本的一等品中，随机抽取2件产品的所有可能结果为 $\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_4\}, \{A_1, A_5\}, \{A_1, A_7\}, \{A_1, A_9\}, \{A_2, A_4\}, \{A_2, A_5\}, \{A_2, A_7\}, \{A_2, A_9\}, \{A_4, A_5\}, \{A_4, A_7\}, \{A_4, A_9\}, \{A_5, A_7\}, \{A_5, A_9\}, \{A_7, A_9\}$ ，共15种.

(ii) 解：在该样本的一等品中，综合指标S等于4的产品编号分别为 $A_1, A_2,$

A_5, A_7 , 则事件B发生的所有可能结果为 $\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_5\}, \{A_1, A_7\}, \{A_2, A_5\}, \{A_2, A_7\}, \{A_5, A_7\}$ 共6种。

$$\text{所以 } P(B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

(16) 本小题主要考查同角三角函数的基本关系、二倍角的正弦与余弦公式、两角差的正弦公式以及正弦定理、余弦定理等基础知识.考查基本运算求解能力.满分13分。

(I) 解: 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 可得 $b \sin A = a \sin B$, 又由 $b \sin A = 3c \sin B$, 可得 $a = 3c$, 又 $a = 3$, 故 $c = 1$.

$$\text{由 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \cos B = \frac{2}{3}, \text{ 可得 } b = \sqrt{6}.$$

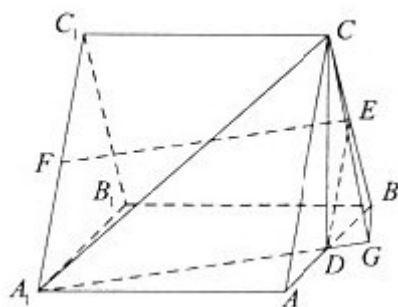
$$(II) \text{ 解: 由 } \cos B = \frac{2}{3}, \text{ 得 } \sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ 进而得 } \cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = -\frac{1}{9},$$

$$\sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

$$\text{所以 } \sin\left(2B - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2B \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2B \sin \frac{\pi}{3} = \frac{4\sqrt{5} + \sqrt{3}}{18}.$$

(17) 本小题主要考查直线与平面平行、平面与平面垂直、直线与平面所成的角等基础知识。考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力。满分13分。

(I) 证明: 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC \parallel A_1C_1$, 且 $AC = A_1C_1$, 连接ED, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E分别为AB, BC的中点, 所以



因为D, E分别为BC的中点, 所以

$DE = \frac{1}{2} AC$ 且 $DE \parallel AC$, 又因为F为 A_1C_1 的中点, 可得 $A_1F = DE$, 且 $A_1F \parallel DE$, 即四边形 A_1DEF 为平行四边形, 所以 $EF \parallel DA_1$. 又 $EF \notin$ 平面 A_1CD , $DA_1 \subset$ 平面 A_1CD , 所以, $EF \parallel$ 平面 A_1CD 。

(II) 证明: 由于底面 ABC 是正三角形, D 为 AB 的中点, 故 $CD \perp AB$, 又由于侧棱 $A_1A \perp$ 底面 ABC , $CD \subset$ 平面 ABC , 所以 $A_1A \perp CD$, 又 $A_1A \cap AB = A$, 因此 $CD \perp$ 平面 A_1ABB_1 , 而 $CD \subset$ 平面 A_1CD , 所以平面 $A_1CD \perp A_1ABB_1$.

(III) 解: 在平面 A_1ABB_1 内, 过点 B 作 $BG \perp A_1D$ 交直线 A_1D 于点 G , 连接 CG . 由于平面 $A_1CD \perp$ 平面 A_1ABB_1 , 而直线 A_1D 是平面 A_1CD 与平面 A_1ABB_1 的交线, 故 $BG \perp$ 平面 A_1CD . 由此得 $\angle BCG$ 为直线 BC 与平面 A_1CD 所成的角.

设棱长为 a , 可得 $A_1D = \frac{\sqrt{5}a}{2}$, 由 $\triangle A_1AD \sim \triangle BGD$, 易得 $BG = \frac{\sqrt{5}a}{5}$. 在 $Rt \triangle BGC$ 中, \sin

$$\angle BCG = \frac{BG}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

所以直线 BC 与平面 A_1CD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(18) 本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线的方程、向量的运算等基础知识。考查用代数方法研究圆锥曲线的性质。考查运算求解能力, 以及用方程思想解决问题的能力。满分13分。

(I) 解: 设 $F(-c, 0)$, 由 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 知 $a = \sqrt{3}c$.

过点 F 且与 x 轴垂直的直线为 $x = -c$, 代入椭圆方程有 $\frac{(-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 解得 $y = \pm \frac{\sqrt{6}b}{3}$, 于是

$$\frac{2\sqrt{6}b}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ 解得 } b = \sqrt{2}, \text{ 又 } a^2 - c^2 = b^2, \text{ 从而 } a = \sqrt{3}, c = 1, \text{ 所以椭圆的方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(II) 解: 设点 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, 由 $F(-1, 0)$ 得直线 CD 的方程为 $y = k(x+1)$, 由方程组

$$\begin{cases} y = k(x+1) \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 整理得 } (2+3k^2)x^2 + 6k^2x + 3k^2 - 6 = 0.$$

求解可得 $x_1 + x_2 = -\frac{6k^2}{2+3k^2}$, $x_1x_2 = \frac{3k^2-6}{2+3k^2}$. 因为 $A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0)$, 所以 $\overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{CB} =$

$$\begin{aligned} & (x_1 + \sqrt{3}, y_1) \cdot (\sqrt{3} - x_2, -y_2) + (x_2 + \sqrt{3}, y_2) \cdot (\sqrt{3} - x_1, -y_1) \\ & = 6 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2 = 5 - 2x_1x_2 - 2k^2(x_1+1)(x_2+1) - 6 - \end{aligned}$$

$$(2+2k^2)x_1x_2-2k^2(x_1+x_2)-2k^2$$

$$=6+\frac{2k^2+12}{2+3k^2}.$$

由已知得 $6+\frac{2k^2+12}{2+3k^2}=8$, 解得 $k=\pm\sqrt{2}$.

(19) 本小题主要考查等差数列的概念, 等比数列的概念、通项公式、前n项和公式, 数列的基本性质等基础知识.

考查分类讨论的思想, 考查运算能力、分析问题和解决问题的能力. 满分14分.

(I) 解: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 因为 $-2S_2, S_3$,

$4S_4$ 成等差数列, 所以 $S_3+2S_2=4S_4-S_3$, 即 $S_4-S_3=S_2-S_4$, 可得 $2a_4=-a_3$, 于是 $q=\frac{a_4}{a_3}=-\frac{1}{2}$.

又 $a_1=\frac{3}{2}$, 所以等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{3}{2^n}$.

(II) 证明:

$$S_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n, S_n+\frac{1}{S_n}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=\begin{cases} 2+\frac{1}{2^n(2^n+1)}, n \text{ 为奇数,} \\ 2+\frac{1}{2^n(2^n-1)}, n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

当 n 为奇数时, $S_n+\frac{1}{S_n}$ 随 n 的增大而减小, 所以 $S_n+\frac{1}{S_n}\leq S_1+\frac{1}{S_1}=\frac{13}{6}$.

当 n 为偶数时, $S_n+\frac{1}{S_n}$ 随 n 的增大而减小, 所以 $S_n+\frac{1}{S_n}\leq S_2+\frac{1}{S_2}=\frac{25}{12}$.

故对于 $n\in N^n$, 有 $S_n+\frac{1}{S_n}\leq\frac{13}{6}$.

(20) 本小题主要考查导数的运算及其几何意义, 利用导数研究函数的单调性, 考查分类讨论思想、化归思想、函数思想. 考查综合分析问题和解决问题的能力. 满分14分.

(I) 证明: 设函数 $f_1(x)=x^3-(a+5)x (x\leq 0)$, $f_2(x)=x^3-\frac{a+3}{2}x^2+ax (x\geq 0)$,

① $f_1'(x)=3x^2-(a+5)$, 由 $a\in[-2,0]$, 从而当 $-1<x<0$ 时, $f_1'(x)=3x^2-(a+5)$

$<3-a-5\leq 0$, 所以函数 $f_1(x)$ 在区间 $(-1,0]$ 内单调递减.

②

$f_2'(x)=3x^2-(a+3)x+a=(3x-a)(x-1)$, 由于 $a\in[-2,0]$, 所以当 $0<x<1$ 时, $f_2'(x)<0$; 当

$x > 1$ 时, $f_2'(x) > 0$. 即函数 $f_2(x)$ 在区间 $[0, 1)$ 内单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递增. 综合①, ②及 $f_1(0) = f_2(0)$, 可知函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 内单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 内单调递增.

(II) 证明: 由 (I) 知 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内单调递减, 在区间 $(0, \frac{a+3}{6})$ 内单调递减, 在区间 $(\frac{a+3}{6}, +\infty)$ 内单调递增.

因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $P_i(x_i, f(x_i))$ ($i=1, 2, 3$) 处的切线相互平行, 从而 x_1, x_2, x_3 互不相等, 且 $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3)$. 不妨设 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$, 由

$$3x_1^2 - (a+5) = 3x_2^2 - (a+3)x_2 + a = 3x_3^2 - (a+3)x_3 + a,$$

可得 $3x_2^2 - 3x_3^2 - (a+3)(x_2 - x_3) = 0$, 解得 $x_2 + x_3 = \frac{a+3}{3}$, 从而 $0 < x_2 < \frac{a+3}{6} < x_3$.

$$\text{设 } g(x) = 3x^2 - (a+3)x + a, \text{ 则 } g\left(\frac{a+3}{6}\right) < g(x_2) < g(0) = a.$$

$$\text{由 } 3x_1^2 - (a+5) = g(x_2) < a, \text{ 解得 } -\sqrt{\frac{2a+5}{3}} < x_1 < 0, \text{ 所以 } x_1 + x_2 + x_3 > -\sqrt{\frac{2a+5}{3}} + \frac{a+3}{3},$$

$$\text{设 } t = \sqrt{\frac{2a+5}{3}}, \text{ 则 } a = \frac{3t^2 - 5}{2}, \text{ 因为 } a \in [-2, 0], \text{ 所以 } t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right], \text{ 故 } x_1 + x_2 + x_3 >$$

$$-t + \frac{3t^2 + 1}{6} = \frac{1}{2}(t-1)^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3},$$

$$\text{即 } x_1 + x_2 + x_3 > -\frac{1}{3}.$$