

# 2000 年河北高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页。第 II 卷 3 至 8 页。共 150 分。考试时间 120 分钟。

## 第 I 卷（选择题 60 分）

### 注意事项：

1. 答第 I 卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上。
2. 每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答，不能答在试题卷上。
3. 考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式：

三角函数的积化和差公式

正棱台、圆台的侧面积公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$S_{\text{侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

其中  $c'$ 、 $c$  分别表示上、下底面

周长， $l$  表示斜高或母线长

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$V_{\text{台}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

其中  $S'$ 、 $S$  分别表示上、下底面积，

$h$  表示高

一、选择题：本大题共 12 分，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1) 设集合  $A = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } -10 \leq x \leq -1\}$ ， $B = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } |x| \leq 5\}$ ，则  $A \cup B$  中的元素个数是

- (A) 11            (B) 10            (C) 16            (D) 15

(2) 在复平面内，把复数  $3 - \sqrt{3}i$  对应的向量按顺时针方向旋转  $\frac{\pi}{3}$ ，所得向量对应的复数是

- (A)  $2\sqrt{3}$       (B)  $-2\sqrt{3}i$       (C)  $\sqrt{3}-3i$       (D)  $3+\sqrt{3}i$

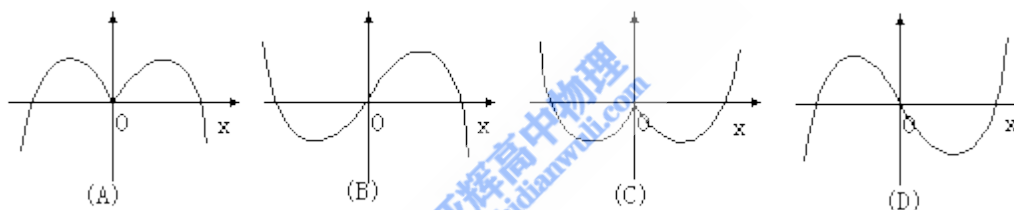
(3) 一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ ，这个长方体对角线的长是

- (A)  $2\sqrt{3}$       (B)  $3\sqrt{2}$       (C) 6      (D)  $\sqrt{6}$

(4) 已知  $\sin \alpha > \sin \beta$ ，那么下列命题成立的是

- (A) 若  $\alpha, \beta$  是第一象限角，则  $\cos \alpha > \cos \beta$   
 (B) 若  $\alpha, \beta$  是第二象限角，则  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$   
 (C) 若  $\alpha, \beta$  是第三象限角，则  $\cos \alpha > \cos \beta$   
 (D) 若  $\alpha, \beta$  是第四象限角，则  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$

(5) 函数  $y = -x \cos x$  的部分图象是



(6) 《中华人民共和国个人所得税法》规定，公民全月工资、薪金所得不超过 800 元的部分不必纳税，超过 800 元的部分为全月应纳税所得额，此项税款按下表分希累进计算。

全月应纳税所得额	税率
不超过 500 元的部分	5%
超过 500 元至 2000 元的部分	10%
超过 2000 元至 5000 元的部分	15%
...	...

某人一月份应交纳此项税款 26.78 元，则他的当月工资、薪金所得介于

- (A) 800~900 元      (B) 900~1200 元      (C) 1200~1500 元      (D) 1500~2800 元

(7) 若  $a > b > 1$ ， $P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$ ， $Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$ ， $R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ，则

- (A)  $R < P < Q$       (B)  $P < Q < R$       (C)  $Q < P < R$       (D)  $P < R < Q$

(8) 已知两条直线  $l_1: y = x$ ,  $l_2: ax - y = 0$ , 其中  $a$  为实数。当这两条直线的夹角在  $(0, \frac{\pi}{12})$  内变动时,  $a$  的取值范围是

- (A)  $(0, 1)$       (B)  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$       (C)  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1) \cup (1, \sqrt{3})$       (D)  $(1, \sqrt{3})$

(9) 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形, 这个圆柱的全面积与侧面积的比是

- (A)  $\frac{1+2\pi}{2\pi}$       (B)  $\frac{1+4\pi}{4\pi}$       (C)  $\frac{1+2\pi}{\pi}$       (D)  $\frac{1+4\pi}{2\pi}$

(10) 过原点的直线与圆  $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$  相切, 若切点在第三象限, 则该直线的方程是

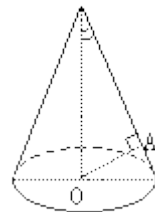
- (A)  $y = \sqrt{3}x$       (B)  $y = -\sqrt{3}x$       (C)  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$       (D)  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$

(11) 过抛物线  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) 的焦点  $F$  作一直线交抛物线于  $P$ 、 $Q$  两点, 若线段  $PF$  与  $FQ$  的长分别是  $p$ 、 $q$ , 则  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  等于

- (A)  $2a$       (B)  $\frac{1}{2a}$       (C)  $4a$       (D)  $\frac{4}{a}$

(12) 如图,  $OA$  是圆锥底面中心  $O$  到母线的垂线,  $OA$  绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分, 则母线与轴的夹角为

- (A)  $\arccos \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$       (B)  $\arccos \frac{1}{2}$       (C)  $\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$       (D)  $\arccos \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$



2000年普通高等学校招生全国统一考试

数学(文史类)

第II卷(非选择题共90分)

注意事项:

1. 第II卷共6页,用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。
2. 答卷前将密封线内的项目填写清楚。

题号	二	三						总分
		17	18	19	20	21	22	
分数								

二、填空题:本大题共4小题,每小题4分,共16分。把答案填在题中横线上。

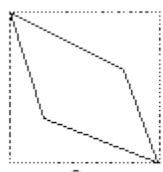
(13) 乒乓球队的10名队员中有3名主力队员,派5名参加比赛,3名主力队员要安排在第一、第三、五位置,其余7名队员选2名安排在第二、四位置,那么不同的出场安排共有\_\_\_\_\_种(用数字作答)

(14) 椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  的焦点为  $F_1, F_2$ , 点P为其上的动点。当  $\angle F_1PF_2$  为钝角时, 点P横坐标的取值范围是\_\_\_\_\_。

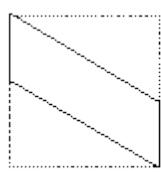
(15) 设  $\{a_n\}$  是首项为1的正项数列, 且  $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ), 则它的通项公式是  $a_n =$ \_\_\_\_\_。

(16) 如图, E、F 分别为正方体的面  $ADD_1A_1$ 、面  $BCC_1B_1$  的中心, 则四边形  $BFD_1E$  在该正方体的面上的射影可能是\_\_\_\_\_。

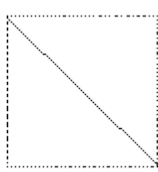
都  
(要求: 把可能的图的序号填上)



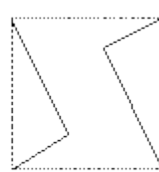
①



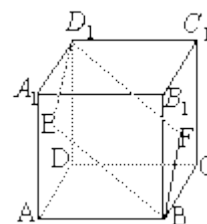
②



③



④



三、解答题: 本大题共 16 小题, 共 74 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

17 (本小题满分 12 分)

已知函数  $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x, x \in \mathbb{R}$

(I) 当函数  $y$  取得最大值时, 求自变量  $x$  的集合;

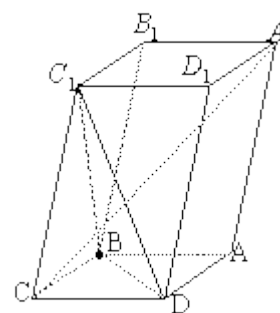
(II) 该函数的图象可由  $y = \sin x (x \in \mathbb{R})$  的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

(18) (本小题满分 12 分)

设  $\{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 已知  $S_7 = 7, S_{15} = 75, T_n$  为数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  的前  $n$  项和, 求  $T_n$ 。

(19) (本小题满分 12 分)

如图, 已知平行六面体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的底面  $ABCD$  是菱形, 且  $\angle C_1CB = \angle C_1CD = \angle BCD = 60^\circ$



(I) 证明:  $C_1C \perp BD$ ;

(II) 当  $\frac{CD}{CC_1}$  的值为多少时, 能使  $A_1C \perp$  平面  $C_1BD$ ? 请给出证明。

(20) (本小题满分 12 分)

设函数  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax$ , 其中  $a > 0$ 。

(I) 解不等式  $f(x) \leq 1$ ;

(II) 证明: 当  $a \geq 0$  时, 函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上是单调函数。

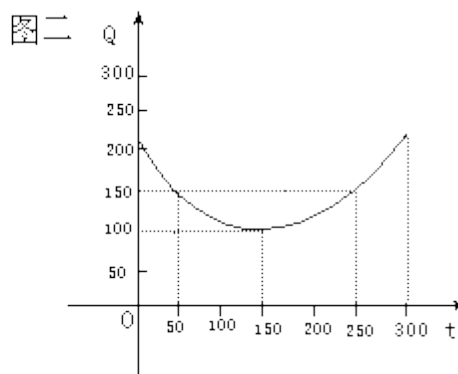
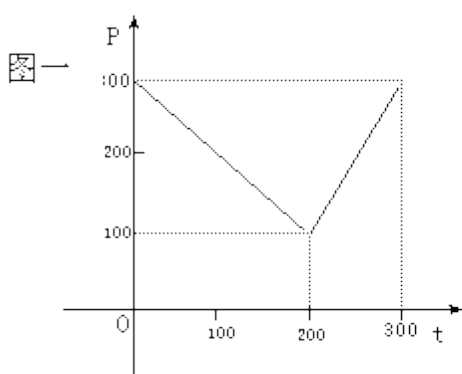
(21) (本小题满分 12 分)

某蔬菜基地种植西红柿, 由历年市场行情得知, 从二月一日起的 300 天内, 西红柿市场售价与上市时间的关系用图一的一条折线表示; 西红柿的种植成本与上市时间的关系用图二的抛物线段表示。

(I) 写出图一表示的市场售价与时间的函数关系  $P=f(t)$ ;

写出图二表示的种植成本与时间的函数关系式  $Q=g(t)$ ;

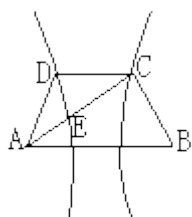
(II) 认定市场售价减去种植成本为纯收益, 问何时上市的西红柿纯收益最大?



(注: 市场售价和种植成本的单位: 元/ $10^2$ kg, 时间单位: 天)

(22) (本小题满分 14 分)

如图, 已知梯形 ABCD 中  $|AB|=2|CD|$ , 点 E 分有向线段  $\overline{AC}$  所成的比为  $\frac{8}{11}$ , 双曲线过 C、D、E 三点, 且以 A、B 为焦点。求双曲线的离心率。



2000 年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题 (文史类) 参考解答及评分标准

说明:

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

**一、选择题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 5 分，满分 60 分。**

- (1) C      (2) B      (3) D      (4) D      (5) D      (6) C  
(7) B      (8) C      (9) A      (10) C      (11) C      (12) D

**二、填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 4 分，满分 60 分。**

- (13) 252      (14)  $-\frac{3}{\sqrt{5}} < x < \frac{3}{\sqrt{5}}$       (15)  $\frac{1}{n}$       (16) ②③

**三、解答题**

(17) 本小题主要考查三角函数的图象和性质，考查利用三角公式进行恒等变形的技能以及运算能力。满分 12 分。

解： (I)

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{3} \sin x + \cos x \\ &= 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

y 取得最大值必须且只需

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

即 
$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

所以，当函数 y 取得最大值时，自变量 x 的集合为

$$\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 变换的步骤是:

(1) 把函数  $y = \sin x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$ , 得到函数  $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$  的图象;  $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

(2) 令所得到的图象上各点横坐标不变, 把纵坐标伸长到原来的 2 倍, 得到函数  $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{6})$  的  
 图象;

经过这样的变换就得到函数  $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$  的图象。  $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

(18) 本小题主要考查等差数列的基础知识和基本技能, 运算能力, 满分 12 分。

解: 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$$

$$\because S_7 = 7, S_{15} = 75$$

$$\therefore \begin{cases} 7a_1 + 21d = 7 \\ 15a_1 + 105d = 75 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a_1 + 3d = 1 \\ a_1 + 7d = 5 \end{cases}$$

$$\text{解得 } a_1 = -2, d = 1 \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{1}{2}(n-1)d = -2 + \frac{1}{2}(n-1)$$

$$\therefore \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$  数列  $\{\frac{S_n}{n}\}$  是等差数列, 其首项为  $-2$ , 公差为  $\frac{1}{2}$

$$\therefore T_n = \frac{1}{4}n^2 - \frac{9}{4}n \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

(19) 本小题主要考查直线与直线、直线与平面的关系，逻辑推理能力，满分 12 分。

(I) 证明：连结  $A_1C_1$ 、AC，AC 和 BD 交于 O，连结  $C_1O$

$\because$  四边形 ABCD 是菱形

$\therefore AC \perp BD, BC=CD$

又  $\because \angle BCC_1 = \angle DCC_1, C_1C = C_1C$

$\therefore \triangle C_1BC \cong \triangle C_1DC$

$\therefore C_1B = C_1D$

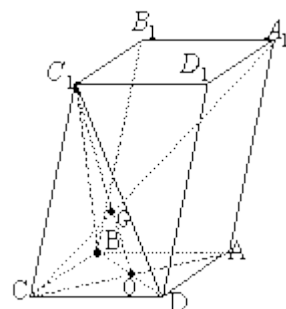
$\because DO=OB$

$\therefore C_1O \perp BD \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

但  $AC \perp BD, AC \cap C_1O = O$

$\therefore C_1C \perp BD \therefore BD \perp \text{平面} AC_1$

又  $C_1C \subset \text{平面} AC_1 \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$



(II) 当  $\frac{CD}{CC_1} = 1$  时，能使  $A_1C \perp \text{平面} C_1BD$

证明一：

$$\because \frac{CD}{CC_1} = 1$$

$\therefore BC = CD = C_1C$

又  $\angle BCD = \angle C_1CB = \angle C_1CD$

由此可推得  $BD = C_1B = C_1D$

∴ 三棱锥  $C - C_1BD$  是正三棱锥。……………9分

设  $A_1C$  与  $C_1O$  相交于 G.

∵  $A_1C_1 \parallel AC$ , 且  $A_1C_1 : OC = 2 : 1$

∴  $C_1O : GO = 2 : 1$

又  $C_1O$  是正三角形  $C_1BD$  的 BD 边上的高和中线,

∴ 点 G 是正三角形  $C_1BD$  的中心。

∴  $CG \perp$  平面  $C_1BD$

即  $A_1C \perp$  平面  $C_1BD$ 。

……………12

分

证明二:

由 (I) 知,  $BD \perp$  平面  $AC_1$

∵  $A_1C \subset$  平面  $AC_1$ , ∴  $BD \perp A_1C$ 。……………9分

当  $\frac{CD}{CC_1} = 1$  时, 平行六面体的六个面是全等的菱形。

同  $BD \perp AC_1$  的证法可得  $BC_1 \perp A_1C$

又  $BD \perp BC_1 = B$

∴  $A_1C \perp$  平面  $C_1BD$  ……………12分

(20) 本小题主要考查不等式的解法、函数的单调性等基本知识，分数讨论的数学思想方法和运算、推理能力。满分 12 分。

解：(I) 不等式  $f(x) \leq 1$  即

$$\sqrt{x^2 + 1} \leq 1 + ax,$$

由此得  $1 \leq 1 + ax$ ，即  $ax \geq 0$ ，其中常数  $a > 0$

所以，原不等式等价于

$$\begin{cases} x^2 + 1 \leq (1 + ax)^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ (a^2 - 1)x + 2a \geq 0 \end{cases}$$

.....3 分

所以，当  $0 < a < 1$  时，所给不等式的解集为  $\{x | 0 \leq x \leq \frac{2a}{1 - a^2}\}$ ;

当  $a \geq 1$  时，所给不等式的解集为  $\{x | x \geq 0\}$

.....6 分

(II) 证明：在区间  $[0, +\infty)$  上任取  $x_1, x_2$ ，使得  $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1} - a(x_1 - x_2) \\ &= \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2) \left( \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a \right) \end{aligned}$$

.....9 分

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} < 1, \text{ 且 } a \geq 1$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} - a < 0$$

又  $x_1 - x_2 < 0$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$$

$$\text{即 } f(x_1) > f(x_2)$$

所以，当  $a \geq 1$  时，函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上是单调递减函数。……………12 分

(21) 本小题主要考查由函数图象建立函数关系式和求函数最大值的问题，考查运用所学知识解决实际问题的能力，满分 12 分。

解：(I) 由图一可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t) = \begin{cases} 300 - t, & 0 \leq t \leq 200 \\ 2t - 300, & 200 < t \leq 300 \end{cases} \quad \text{……………2 分}$$

由图二可得种植成本与时间的函数关系为

$$g(t) = \frac{1}{200}(t - 150)^2 + 100, \quad 0 \leq t \leq 300 \quad \text{……………4 分}$$

(II) 设  $t$  时刻的纯收益为  $h(t)$ ，则由题意得

$$h(t) = f(t) - g(t)$$

$$\text{即 } h(t) = \begin{cases} -\frac{1}{200}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{175}{2}, & 0 \leq t \leq 200 \\ -\frac{1}{200}t^2 + \frac{2}{7}t - \frac{1025}{2}, & 200 < t \leq 300 \end{cases} \quad \text{……………6 分}$$

当  $0 \leq t \leq 200$  时，配方整理得

$$h(t) = -\frac{1}{200}(t - 50)^2 + 100$$

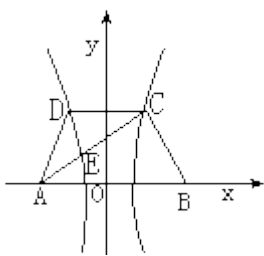
所以，当  $t=50$  时， $h(t)$  取得区间  $[0, 200]$  上的最大值 100；

当  $200 < t \leq 300$  时，配方整理得

$$h(t) = -\frac{1}{200}(t - 350)^2 + 100$$

所以，当  $t=300$  时， $h(t)$  取得区间  $[200, 300]$  上的最大值 87.5。……………10 分

综上，由  $100 > 87.5$  可知， $h(t)$  在区间  $[0, 300]$  上可以取得最大值 100，此时  $t=50$ ，即从二月一日开始的第 50 天时，上市的西红柿纯收益最大。……………12 分



(22) 本小题主要考查坐标法、定比分点坐标公式、双曲线的概念和性质，推理、运算能力和综合应用数学知识解决问题的能力，满分 14 分。

解：如图，以 AB 的垂直平分线为 y 轴，直线 AB 为 x 轴，建立直角坐标系 xOy，则  $CD \perp y$  轴。

因为双曲线经过点 C、D，且以 A、B 为焦点，由双曲线的对称性知 C、D 关于 x 轴对称。

.....2 分

依题意，记  $A(-c, 0)$ ， $C(\frac{c}{2}, h)$ ， $B(c, 0)$ ，其中  $c$  为双曲线的半焦距， $c = \frac{1}{2} |AB|$ ， $h$  是梯形的高。

由定比分点坐标公式，得点 E 的坐标为

$$x_E = \frac{-c + \frac{8}{11} \times \frac{c}{2}}{1 + \frac{8}{11}} = -\frac{7}{19}c$$

$$y_E = \frac{0 + \frac{8}{11} \times h}{1 + \frac{8}{11}} = \frac{8}{19}h$$

设双曲线的方程为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，则离心率  $e = \frac{c}{a}$ 。

由点 C、E 在双曲线上，得

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \cdot \frac{c^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = 1 & \text{①} \\ \frac{49}{361} \cdot \frac{c^2}{a^2} - \frac{64}{361} \cdot \frac{h^2}{b^2} = 1 & \text{②} \end{cases}$$

.....10

分

由①式得  $\frac{h^2}{b^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{c^2}{a^2} - 1$  代入②式得  $\frac{c^2}{a^2} = 9$

所以，离心率  $e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = 3$

.....14 分

