

2007 年河北高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

注意事项：

1. 答题前，考生在答题卡上务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将自己的姓名、准考证号填写清楚，并贴好条形码。请认真核准条形码上的准考证号、姓名和科目。

2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，在试题卷上作答无效。

3. 本卷共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件 A, B 互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A, B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P ，那么

n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (n=0,1,2,\dots,n)$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题

(1) 设 $S = \{x | 2x+1 > 0\}$ ， $T = \{x | 3x-5 < 0\}$ ，则 $S \cap T =$ ()

- A. \emptyset B. $\left\{x \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$ C. $\left\{x \mid x > \frac{5}{3}\right\}$ D. $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{3}\right\}$

(2) α 是第四象限角， $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ ， $\sin \alpha =$ ()

- A. $\frac{5}{13}$ B. $-\frac{5}{13}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $-\frac{5}{12}$

(3) 已知向量 $\mathbf{a} = (-5, 6)$ ， $\mathbf{b} = (6, 5)$ ，则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} ()

- A. 垂直 B. 不垂直也不平行 C. 平行且同向 D. 平行且反向

(4) 已知双曲线的离心率为 2，焦点是 $(-4, 0)$ ， $(4, 0)$ ，则双曲线方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ B. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$ D. $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{10} = 1$

(5) 甲、乙、丙 3 位同学选修课程，从 4 门课程中，甲选修 2 门，乙、丙各选修 3 门，则

不同的选修方案共有 ()

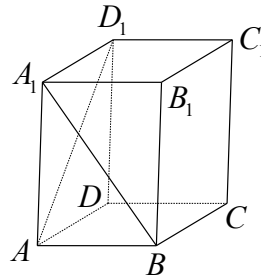
- A. 36种 B. 48种 C. 96种 D. 192种

(6) 下面给出四个点中, 位于 $\begin{cases} x+y-1 < 0, \\ x-y+1 > 0 \end{cases}$ 表示的平面区域内的点是 ()

- A. (0,2) B. (-2,0) C. (0,-2) D. (2,0)

(7) 如图, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = 2AB$, 则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$



(8) 设 $a > 1$, 函数 $f(x) = \log_a x$ 在区间 $[a, 2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\frac{1}{2}$, 则 $a =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

(9) $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, $h(x) = f(x) + g(x)$, 则 “ $f(x)$, $g(x)$ 均为偶函数” 是 “ $h(x)$ 为偶函数” 的 ()

- A. 充要条件 B. 充分而不必要的条件
C. 必要而不充分的条件 D. 既不充分也不必要的条件

(10) 函数 $y = 2\cos^2 x$ 的一个单调增区间是 ()

- A. $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ B. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ C. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ D. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

(11) 曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 + x$ 在点 $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ 处的切线与坐标轴围成的三角形面积为 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

(12) 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l , 经过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A , $AK \perp l$, 垂足为 K , 则 $\triangle AKF$ 的面积是 ()

- A. 4 B. $3\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{3}$ D. 8

第 II 卷

注意事项:

1. 答题前, 考生先在答题卡上用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将自己的姓名、准考证号填写清楚, 然后贴好条形码. 请认真核准条形码上的准考证号、姓名和科目.
2. 第 II 卷共 2 页, 请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答, 在试题卷上作答无效.
3. 本卷共 10 题, 共 90 分.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在横线上.

(13) 从某自动包装机包装的食盐中, 随机抽取 20 袋, 测得各袋的质量分别为 (单位: g):

492	496	494	495	498	497	501	502	504	496
497	503	506	508	507	492	496	500	501	499

根据频率分布估计总体分布的原理, 该自动包装机包装的袋装食盐质量在 $497.5\text{g} \sim 501.5\text{g}$ 之间的概率约为_____.

(14) 函数 $y = f(x)$ 的图像与函数 $y = \log_3 x$ ($x > 0$) 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 则 $f(x) =$ _____.

(15) 正四棱锥 $S - ABCD$ 的底面边长和各侧棱长都为 $\sqrt{2}$, 点 S, A, B, C, D 都在同一个球面上, 则该球的体积为_____.

(16) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_1, 2S_2, 3S_3$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的公比为_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(17) (本小题满分 10 分)

设锐角三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = 2b \sin A$.

(I) 求 B 的大小;

(II) 若 $a = 3\sqrt{3}$, $c = 5$, 求 b .

(18) (本小题满分 12 分)

某商场经销某商品, 顾客可采用一次性付款或分期付款购买. 根据以往资料统计, 顾客采用一次性付款的概率是 0.6, 经销一件该商品, 若顾客采用一次性付款, 商场获得利润 200 元; 若顾客采用分期付款, 商场获得利润 250 元.

(I) 求 3 位购买该商品的顾客中至少有 1 位采用一次性付款的概率;

(II) 求 3 位顾客每人购买 1 件该商品, 商场获得利润不超过 650 元的概率.

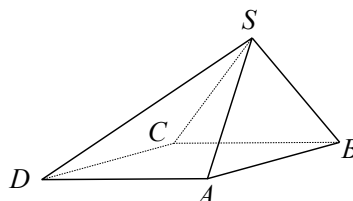
(19) (本小题满分 12 分)

四棱锥 $S - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, 侧面 $SBC \perp$ 底面 $ABCD$, 已知 $\angle ABC = 45^\circ$, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, $SA = SB = \sqrt{3}$.

(I) 证明: $SA \perp BC$;

(II) 求直线 SD 与平面 SBC 所成角的大小.

(20) (本小题满分 12 分)



设函数 $f(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 3bx + 8c$ 在 $x = 1$ 及 $x = 2$ 时取得极值.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 若对于任意的 $x \in [0, 3]$, 都有 $f(x) < c^2$ 成立, 求 c 的取值范围.

(21) (本小题满分 12 分)

设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是各项都为正数的等比数列, 且 $a_1 = b_1 = 1$, $a_3 + b_5 = 21$,

$$a_5 + b_3 = 13$$

(I) 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ 的前 n 项和 S_n .

(22) (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线交椭圆于 B, D 两点, 过 F_2

的直线交椭圆于 A, C 两点, 且 $AC \perp BD$, 垂足为 P .

(I) 设 P 点的坐标为 (x_0, y_0) , 证明: $\frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{2} < 1$;

(II) 求四边形 $ABCD$ 的面积的最小值.

参考答案

一、选择题

1. D 2. B 3. A 4. A 5. C 6. C 7. D 8. D 9. B
10. D 11. A 12. C

二、填空题

13. 0.25 14. $3^x (x \in \mathbf{R})$ 15. $\frac{4\pi}{3}$ 16. $\frac{1}{3}$

三、解答题

17. 解:

(I) 由 $a = 2b \sin A$, 根据正弦定理得 $\sin A = 2 \sin B \sin A$, 所以 $\sin B = \frac{1}{2}$,

由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形得 $B = \frac{\pi}{6}$.

(II) 根据余弦定理, 得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 27 + 25 - 45 = 7$.

所以, $b = \sqrt{7}$.

18. 解:

(I) 记 A 表示事件: “3 位顾客中至少 1 位采用一次性付款”, 则 \bar{A} 表示事件: “3 位顾客中无人采用一次性付款”.

$$P(\bar{A}) = (1-0.6)^2 = 0.064,$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.064 = 0.936.$$

(II) 记 B 表示事件: “3 位顾客每人购买 1 件该商品, 商场获得利润不超过 650 元”.

B_0 表示事件: “购买该商品的 3 位顾客中无人采用分期付款”.

B_1 表示事件: “购买该商品的 3 位顾客中恰有 1 位采用分期付款”.

$$\text{则 } B = B_0 + B_1.$$

$$P(B_0) = 0.6^3 = 0.216, \quad P(B_1) = C_3^1 \times 0.6^2 \times 0.4 = 0.432.$$

$$P(B) = P(B_0 + B_1)$$

$$= P(B_0) + P(B_1)$$

$$= 0.216 + 0.432$$

$$= 0.648.$$

19. 解法一:

(1) 作 $SO \perp BC$, 垂足为 O , 连结 AO , 由侧面 $SBC \perp$ 底面 $ABCD$, 得 $SO \perp$ 底面 $ABCD$.

因为 $SA = SB$, 所以 $AO = BO$,

又 $\angle ABC = 45^\circ$, 故 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形, $AO \perp BO$,

由三垂线定理, 得 $SA \perp BC$.

(II) 由 (I) 知 $SA \perp BC$,

依题设 $AD \parallel BC$,

故 $SA \perp AD$, 由 $AD = BC = 2\sqrt{2}$,

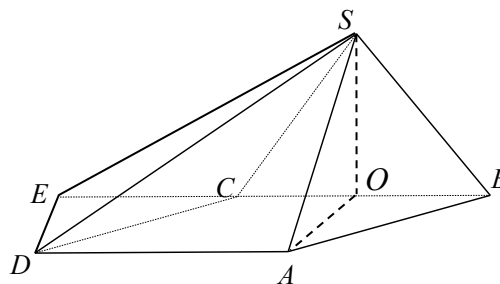
$$SA = \sqrt{3},$$

$$SD = \sqrt{AD^2 + SA^2} = \sqrt{11}.$$

又 $AO = AB \sin 45^\circ = \sqrt{2}$, 作 $DE \perp BC$, 垂足为 E ,

则 $DE \perp$ 平面 SBC , 连结 SE . $\angle ESD$ 为直线 SD 与平面 SBC 所成的角.

$$\sin \angle ESD = \frac{ED}{SD} = \frac{AO}{SD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{22}}{11}$$



所以，直线 SD 与平面 SBC 所成的角为 $\arcsin \frac{\sqrt{22}}{11}$.

解法二：

(I) 作 $SO \perp BC$ ，垂足为 O ，连结 AO ，由侧面 $SBC \perp$ 底面 $ABCD$ ，得 $SO \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $SA = SB$ ，所以 $AO = BO$.

又 $\angle ABC = 45^\circ$ ， $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形， $AO \perp OB$.

如图，以 O 为坐标原点， OA 为 x 轴正向，建立直角坐标系 $O-xyz$ ，

因为 $AO = BO = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \sqrt{2}$ ，

$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = 1$ ，

又 $BC = 2\sqrt{2}$ ，所以 $A(\sqrt{2}, 0, 0)$ ，

$B(0, \sqrt{2}, 0)$ ， $C(0, -\sqrt{2}, 0)$.

$S(0, 0, 1)$ ， $\overrightarrow{SA} = (\sqrt{2}, 0, -1)$ ，

$\overrightarrow{CB} = (0, 2\sqrt{2}, 0)$ ， $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ ，所以 $SA \perp BC$.

(II) $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{CB} = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -1)$ ， $\overrightarrow{OA} = (\sqrt{2}, 0, 0)$.

\overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{SD} 的夹角记为 α ， SD 与平面 ABC 所成的角记为 β ，因为 \overrightarrow{OA} 为平面 SBC 的法向量，所以 α 与 β 互余 .

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{SD}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{SD}|} = \frac{\sqrt{22}}{11}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{22}}{11},$$

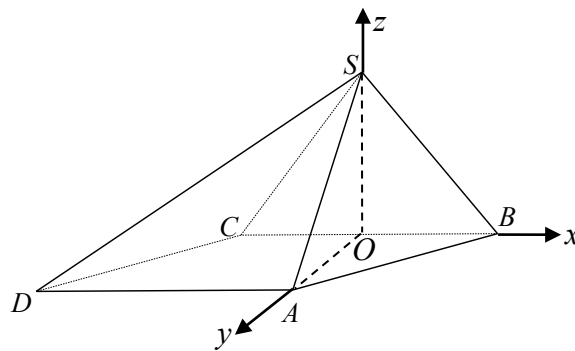
所以，直线 SD 与平面 SBC 所成的角为 $\arcsin \frac{\sqrt{22}}{11}$.

20. 解：

(I) $f'(x) = 6x^2 + 6ax + 3b$ ，

因为函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 及 $x = 2$ 取得极值，则有 $f'(1) = 0$ ， $f'(2) = 0$.

$$\text{即} \begin{cases} 6 + 6a + 3b = 0, \\ 24 + 12a + 3b = 0. \end{cases}$$



解得 $a = -3$, $b = 4$.

(II) 由 (I) 可知, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 8c$,

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2).$$

当 $x \in (0,1)$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x \in (1,2)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (2,3)$ 时, $f'(x) > 0$.

所以, 当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(1) = 5 + 8c$, 又 $f(0) = 8c$, $f(3) = 9 + 8c$.

则当 $x \in [0,3]$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $f(3) = 9 + 8c$.

因为对于任意的 $x \in [0,3]$, 有 $f(x) < c^2$ 恒成立,

所以 $9 + 8c < c^2$,

解得 $c < -1$ 或 $c > 9$,

因此 c 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup (9, +\infty)$.

21. 解:

(I) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则依题意有 $q > 0$ 且 $\begin{cases} 1 + 2d + q^4 = 21, \\ 1 + 4d + q^2 = 13, \end{cases}$

解得 $d = 2$, $q = 2$.

所以 $a_n = 1 + (n-1)d = 2n-1$,

$$b_n = q^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$(II) \frac{a_n}{b_n} = \frac{2n-1}{2^{n-1}}.$$

$$S_n = 1 + \frac{3}{2^1} + \frac{5}{2^2} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-2}} + \frac{2n-1}{2^{n-1}}, \quad \textcircled{1}$$

$$2S_n = 2 + 3 + \frac{5}{2} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-3}} + \frac{2n-1}{2^{n-2}}, \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 得 } S_n = 2 + 2 + \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{2}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

$$= 2 + 2 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) - \frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 + 2 \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^{n-1}} \\
&= 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

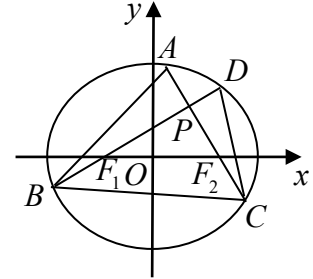
22. 证明

(I) 椭圆的半焦距 $c = \sqrt{3-2} = 1$,

由 $AC \perp BD$ 知点 P 在以线段 F_1F_2 为直径的圆上,

故 $x_0^2 + y_0^2 = 1$,

所以, $\frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{2} \leq \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$.



(II) (i) 当 BD 的斜率 k 存在且 $k \neq 0$ 时, BD 的方程为 $y = k(x+1)$, 代入椭圆方程

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1, \text{ 并化简得 } (3k^2 + 2)x^2 + 6k^2x + 3k^2 - 6 = 0.$$

设 $B(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{6k^2}{3k^2 + 2}, \quad x_1x_2 = \frac{3k^2 - 6}{3k^2 + 2},$$

$$|BD| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{(1+k^2) \cdot [(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{3k^2+2};$$

因为 AC 与 BC 相交于点 p , 且 AC 的斜率为 $-\frac{1}{k}$.

$$\text{所以, } |AC| = \frac{4\sqrt{3} \left(\frac{1}{k^2} + 1 \right)}{3 \times \frac{1}{k^2} + 2} = \frac{4\sqrt{3}(k^2+1)}{2k^2+3}.$$

四边形 $ABCD$ 的面积

$$S = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |AC| = \frac{24(k^2+1)^2}{(3k^2+2)(2k^2+3)} \geq \frac{24(k^2+1)^2}{\left[\frac{(3k^2+2)+(2k^2+3)}{2} \right]^2} = \frac{96}{25}.$$

当 $k^2 = 1$ 时, 上式取等号.

(ii) 当 BD 的斜率 $k = 0$ 或斜率不存在时, 四边形 $ABCD$ 的面积 $S = 4$.

综上，四边形 $ABCD$ 的面积的最小值为 $\frac{96}{25}$.