

2014年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

理科数学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共150分,考试用时120分钟。第 I 卷1至2页,第 II 卷3至5页。

第 I 卷

一、选择题

(本大题共8小题,每小题5分,共40分)在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

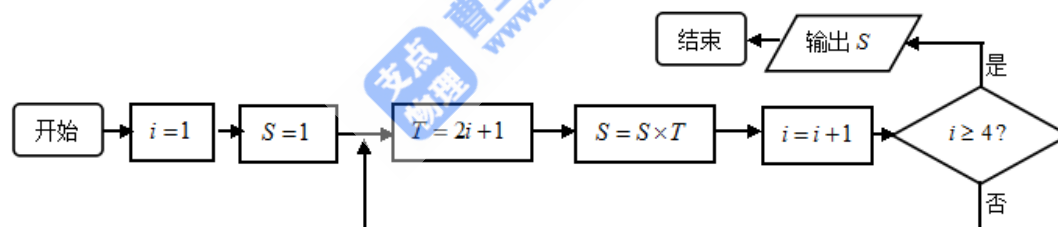
1. i 是虚数单位,复数 $\frac{7+i}{3+4i} =$

- A. $1-i$ B. $-1+i$ C. $\frac{17}{25} + \frac{31}{25}i$ D. $-\frac{17}{7} + \frac{25}{7}i$

2. 设变量 x 、 y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2 \geq 0 \\ x-y-2 \leq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$, 则目标函数 $z = x+2y$ 的最小值为

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

3. 阅读下边的程序框图,运行相应的程序,输出 S 的值为



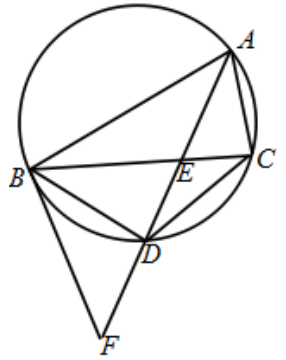
- A. 15 B. 105 C. 245 D. 945

4. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4)$ 的单调递增区间为

- A. $(0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2)$

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线平行于直线 $l: y = 2x + 10$, 双曲线的一个焦点在直线 l 上, 则双曲线的方程为

- A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$
C. $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$ D. $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$



6. 如图, $\triangle ABC$ 是圆的内接三角形, $\angle BAC$ 的平分线交圆于点 D , 交 BC 于点 E , 过点 B 的圆的切线与 AD 的延长线交于点 F , 在上述条件下, 给出下列四个结论: ① BD 平分 $\angle CBF$; ② $FB^2 = FD \cdot FA$; ③ $AE \cdot CE = BE \cdot DE$; ④ $AF \cdot BD = AB \cdot BF$. 则所有正确结论的序号是

- A. ①② B. ③④ C. ①②③
D. ①②④

7. 设 $a, b \in R$, 则“ $a > b$ ”是“ $|a| > |b|$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在边 BC, DC 上,

$BE = \lambda BC, DF = \mu DC$. 若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = 1, \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF} = -\frac{2}{3}$, 则 $\lambda + \mu =$

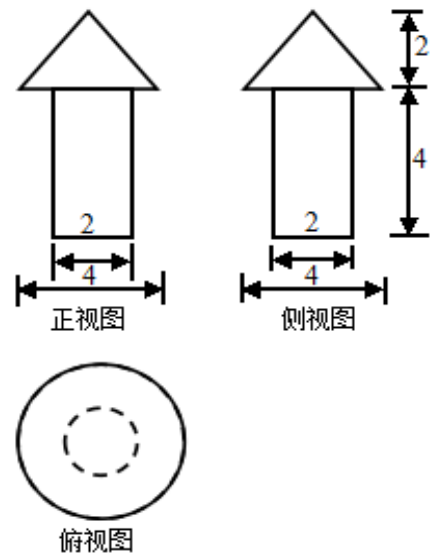
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{7}{12}$

第II卷

二、填空题: 本大题共6小题, 每小题5分, 共30分.

9. 某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向, 拟采用分层抽样的方法, 从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为300的样本进行调查. 已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为4:5:5:6, 则应从一年级本科生中抽取_____名学生.

10. 一个几何体的三视图如图所示(单位: m), 则该几何体的体积为_____ m^3 .



11. 设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 -1 的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 若 S_1, S_2, S_4 成等比数列, 则 a_1 的值为_____.

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 已知 $b - c = \frac{1}{4}a, 2\sin B = 3\sin C$, 则 $\cos A$ 的值为_____.

13. 在以 O 为极点的极坐标系中, 圆 $\rho = 4\sin\theta$ 和直线 $\rho\sin\theta = a$ 相交于 A, B 两点. 若 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 则 a 的值为_____.

14. 已知函数 $f(x) = |x^2 + 3x|$, $x \in R$. 若方程 $f(x) - a|x-1| = 0$ 恰有4个互异的实数根, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题: 本大题共6小题, 共80分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

已知函数 $f(x) = \cos x \sin(x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{4}$, $x \in R$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的最大值和最小值.

16. (本小题满分13分)

某大学志愿者协会有6名男同学, 4名女同学. 在这10名同学中, 3名同学来自数学学院, 其余7名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院. 现从这10名同学中随机选取3名同学, 到希望小学进行支教活动(每位同学被选到的可能性相同).

(1) 求选出的3名同学是来自互不相同学院的概率;

(2) 设 X 为选出的3名同学中女同学的人数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

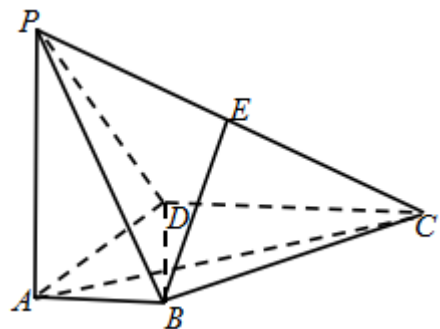
17. (本小题满分13分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \perp AB$, $AB \parallel DC$, $AD = DC = AP = 2$, $AB = 1$, 点 E 为棱 PC 的中点.

(1) 证明: $BE \perp DC$;

(2) 求直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值;

(3) 若 F 为棱 PC 上一点, 满足 $BF \perp AC$, 求二面角 $F-AB-P$ 的余弦值.



18. (本小题满分13分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，右顶点为 A ，上顶点为 B 。

已知 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1F_2|$ 。

(1) 求椭圆的离心率；

(2) 设 P 为椭圆上异于其顶点的一点，以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1 ，经过原点 O 的直线 l 与该圆相切，求直线 l 的斜率。

19. (本小题满分14分)

已知 q 和 n 均为给定的大于1的自然数，设集合 $M = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ ，集合

$A = \{x \mid x = x_1 + x_2q + \dots + x_nq^{n-1}, x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$ 。

(1) 当 $q = 2$ ， $n = 3$ 时，用列举法表示集合 A ；

(2) 设 $s, t \in A$ ， $s = a_1 + a_2q + \dots + a_nq^{n-1}$ ， $t = b_1 + b_2q + \dots + b_nq^{n-1}$ ，其中 $a_i, b_i \in M$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。证明：若 $a_n < b_n$ ，则 $s < t$ 。

20. (本小题满分14分)

设 $f(x) = x - ae^x (a \in R)$ ， $x \in R$ 。已知函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ 。

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 证明 $\frac{x_2}{x_1}$ 随着 a 的减小而增大；

(3) 证明 $x_1 + x_2$ 随着 a 的减小而增大。

