2009年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)文科数学

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共50分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A=\{0,2,a\}$，$B=\{1,a^2\}$，若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$，则 a 的值为(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.4

2. 复数 $\dfrac{3-i}{1-i}$ 等于（　　）

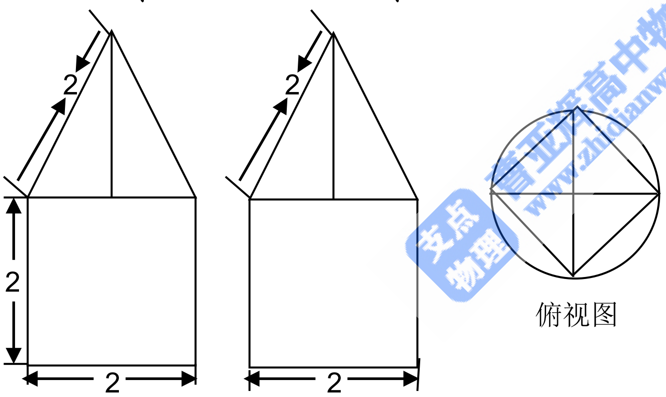
A. $1+2i$　　B. $1-2i$　　C. $2+i$　　D. $2-i$

3. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位，再向上平移1个单位，所得图象的函数解析式是(　　　)

A. $y=2\cos^2 x$　　B. $y=2\sin^2 x$　　C. $y=1+\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$　　D. $y=\cos 2x$

4. 一空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为(　　　).

A. $2\pi+2\sqrt{3}$　　B. $4\pi+2\sqrt{3}$　　C. $2\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $4\pi+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

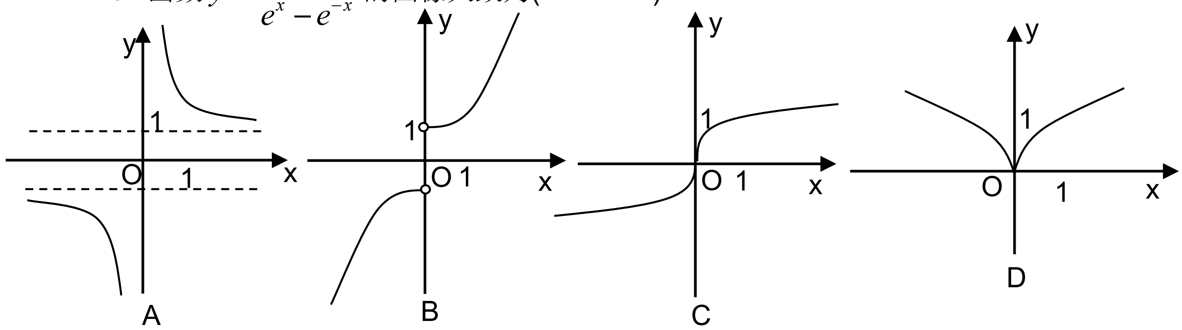


正(主)视图　　侧(左)视图　　俯视图

5. 在R上定义运算⊙：$a\odot b=ab+2a+b$，则满足 $x\odot(x-2)<0$ 的实数 x 的取值范(　　).

A.(0,2)　　B.(-2,1)　　C. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　　D.(-1,2)

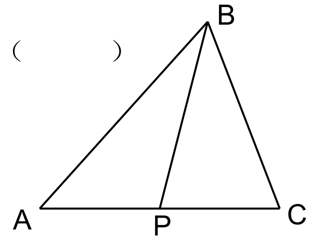
6. 函数 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ 的图像大致为(　　　).



7. 定义在 R 上的函数 f(x)满足 f(x)= $\begin{cases} \log_2(4-x), & x \le 0 \\ f(x-1)-f(x-2), & x>0 \end{cases}$，则 f（3）的值为(　　　)

A.-1　　　B. -2　　　C.1　　　D. 2

8.设 P 是△ABC 所在平面内的一点，$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$，则（　　　）



第 8 题图

A. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=0$　　B. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$

C. $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=0$　　D. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=0$

9. 已知 α，β 表示两个不同的平面，m 为平面 α 内的一条直线，

则“$\alpha \perp \beta$”是“$m \perp \beta$”的(　　　　)

A.充分不必要条件　　　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　　　　　　D.既不充分也不必要条件

10. 设斜率为 2 的直线 l 过抛物线 $y^2=ax$ $(a \ne 0)$ 的焦点 F,且和 y 轴交于点 A,若△OAF(O 为坐标原点)的面积为 4,则抛物线方程为(　　)

A. $y^2=\pm 4x$　　B. $y^2=\pm 8x$　　C. $y^2=4x$　　D. $y^2=8x$

11.在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上随机取一个数 x，$\cos x$ 的值介于 0 到$\frac{1}{2}$之间的概率为(　　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{\pi}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

12. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$，满足 $f(x-4)=-f(x)$,且在区间[0,2]上是增函数,则(　　　).

A. $f(-25)<f(11)<f(80)$　　　B. $f(80)<f(11)<f(-25)$

C. $f(11)<f(80)<f(-25)$　　　D. $f(-25)<f(80)<f(11)$

第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。

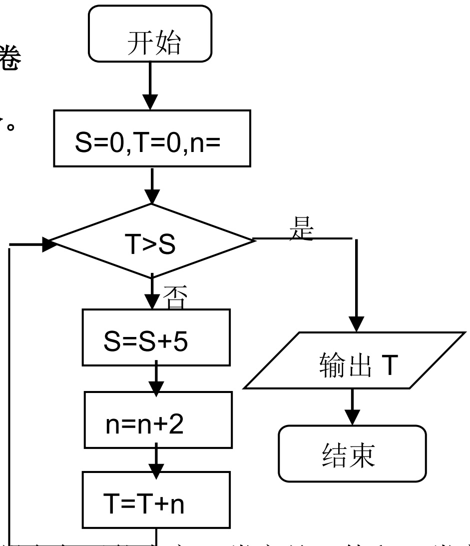
13.在等差数列$\{a_n\}$中,$a_3=7, a_5=a_2+6$,

则 $a_6=$ ______________.

14.若函数 f(x)=a^x-x-a(a>0 且 a≠1)有两个零点,

则实数 a 的取值范围是________.

15.执行右边的程序框图，输出的 T=__________.



16.某公司租赁甲、乙两种设备生产 A,B 两类产品,甲种设备每天能生产 A 类产品 5 件和 B 类产品 10 件,乙

种设备每天能生产 A 类产品 6 件和 B 类产品 20 件.已知设备甲每天的租赁费为 200 元,设备乙每天的租赁费为 300 元,现该公司至少要生产 A 类产品 50 件,B 类产品 140 件,所需租赁费最少为__________元.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。

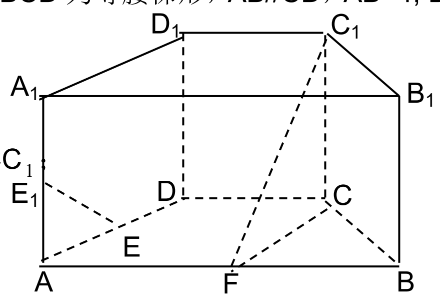
17.(本小题满分 12 分)设函数 f(x)=$2\sin x\cos^2\dfrac{\varphi}{2}+\cos x\sin\varphi-\sin x(0<\varphi<\pi)$在$x=\pi$处取最小值.

(1) 求φ的值;

(2) 在ΔABC 中,a,b,c分别是角 A,B,C 的对边,已知$a=1,b=\sqrt{2}$, $f(A)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,求角 C.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在直四棱柱 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，底面 ABCD 为等腰梯形，AB//CD，AB=4, BC=CD=2, AA_1=2, E、E_1分别是棱 AD、AA_1的中点



（Ⅰ）设 F 是棱 AB 的中点,证明：直线 EE_1//平面 FCC_1;

（Ⅱ）证明:平面 D_1AC⊥平面 BB_1C_1C.

19. （本小题满分 12 分）

一汽车厂生产 A,B,C 三类轿车,每类轿车均有舒适型和标准型两种型号,某月的产量如下表(单位:辆):

	轿车 A	轿车 B	轿车 C
舒适型	100	150	z
标准型	300	450	600

按类型分层抽样的方法在这个月生产的轿车中抽取 50 辆,其中有 A 类轿车 10 辆.

（1） 求 z 的值

（2） 用分层抽样的方法在 C 类轿车中抽取一个容量为 5 的样本.将该样本看成一个总体,从中任取 2 辆,求至少有 1 辆舒适型轿车的概率;

（3） 用随机抽样的方法从 B 类舒适型轿车中抽取 8 辆,经检测它们的得分如下:9.4, 8.6, 9.2, 9.6, 8.7, 9.3, 9.0, 8.2.把这 8 辆轿车的得分看作一个总体,从中任取一个数,求该数与样本平均数之差的绝对值不超过 0.5 的概率.

20.（本小题满分 12 分）

等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，已知对任意的$n\in N^+$，点(n,S_n)，均在函数$y=b^x+r(b>0$且$b\neq 1,b,r$均为常数)的图像上

（1）求 r 的值；

（11）当 b=2 时，记 $b_n=\dfrac{n+1}{4a_n}(n\in N^{+})$ 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+bx^2+x+3$，其中 $a\neq 0$

（1） 当 a,b 满足什么条件时，$f(x)$ 取得极值?

（2） 已知 $a>0$，且 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递增,试用 a 表示出 b 的取值范围.

22. （本小题满分 14 分）

设 $m\in R$，在平面直角坐标系中，已知向量 $\vec{a}=(mx,y+1)$，向量 $\vec{b}=(x,y-1)$，$\vec{a}\perp\vec{b}$，动点 $M(x,y)$ 的轨迹为 E.

（1）求轨迹 E 的方程,并说明该方程所表示曲线的形状;

（2）已知 $m=\dfrac{1}{4}$，证明:存在圆心在原点的圆,使得该圆的任意一条切线与轨迹 E 恒有两个交点 A,B,且 $OA\perp OB$ (O 为坐标原点),并求出该圆的方程;

(3)已知 $m=\dfrac{1}{4}$，设直线 l 与圆 C: $x^2+y^2=R^2$ (1<R<2)相切于 A_1,且 l 与轨迹 E 只有一个公共点 B_1,当 R 为何值时,$|A_1B_1|$取得最大值?并求最大值.

2009 年山东高考数学文科试题答案

1.【解析】:$\because A=\{0,2,a\}$，$B=\{1,a^2\}$，$A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$ $\therefore\begin{cases}a^2=16\\a=4\end{cases}$ $\therefore a=4$，故选 D.

【命题立意】:本题考查了集合的并集运算,并用观察法得到相对应的元素,从而求得答案,本题属于容易题.

2. 【解析】: $\dfrac{3-i}{1-i}=\dfrac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{3+2i-i^2}{1-i^2}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$，故选 C.

【命题立意】:本题考查复数的除法运算，分子、分母需要同乘以分母的共轭复数，把分母变为实数，将除法转变为乘法进行运算.

3. 【解析】:将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位,得到函数 $y=\sin 2(x+\dfrac{\pi}{4})$ 即 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})=\cos 2x$ 的图象,再向上平移 1 个单位,所得图象的函数解析式为 $y=1+\cos 2x=2\cos^2 x$，故选 A.

【命题立意】:本题考查三角函数的图象的平移和利用诱导公式及二倍角公式进行化简解析式的基本知识和基本技能,学会公式的变形.

4. 【解析】:该空间几何体为一圆柱和一四棱锥组成的,圆

柱的底面半径为 1,高为 2,体积为 2π ,四棱锥的底面

边长为 $\sqrt{2}$ ，高为 $\sqrt{3}$ ，所以体积为 $\frac{1}{3}\times\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

所以该几何体的体积为 $2\pi+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.答案:C

【命题立意】:本题考查了立体几何中的空间想象能力,

由三视图能够想象得到空间的立体图,并能准确地

计算出.几何体的体积.

5. 【解析】:根据定义 $x\odot(x-2)=x(x-2)+2x+(x-2)=x^2+x-2<0$,解得 $-2<x<1$,所以所求的实数 x 的取值范围为(-2,1),故选 B.

【命题立意】:本题为定义新运算型,正确理解新定义是解决问题的关键,译出条件再解一元二次不等式.

6. 【解析】:函数有意义，需使 $e^x-e^{-x}\neq 0$ ，其定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$ ，排除 C,D, 又因为 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=1+\frac{2}{e^{2x}-1}$,所以当 $x>0$ 时函数为减函数,故选 A

【命题立意】:本题考查了函数的图象以及函数的定义域、值域、单调性等性质.本题的难点在于给出的函数比较复杂,需要对其先变形,再在定义域内对其进行考察其余的性质.

7. 【解析】:由已知得 $f(-1)=\log_2 5$, $f(0)=\log_2 4=2$, $f(1)=f(0)-f(-1)=2-\log_2 5$,

$f(2)=f(1)-f(0)=-\log_2 5$, $f(3)=f(2)-f(1)=-\log_2 5-(2-\log_2 5)=-2$,故选 B.

【命题立意】:本题考查对数函数的运算以及推理过程..

8. 【解析】:因为 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$ ，所以点 P 为线段 AC 的中点，所以应该选 C。

【命题立意】:本题考查了向量的加法运算和平行四边形法则，可以借助图形解答。

9. 【解析】:由平面与平面垂直的判定定理知如果 m 为平面 α 内的一条直线, $m\perp\beta$,则 $\alpha\perp\beta$,反过来则不一定.所以“ $\alpha\perp\beta$ ”是“ $m\perp\beta$ ”的必要不充分条件

【命题立意】:本题主要考查了立体几何中垂直关系的判定和充分必要条件的概念.

10. 【解析】: 抛物线 $y^2=ax\ \ (a\neq 0)$ 的焦点 F 坐标为 $(\frac{a}{4},0)$,则直线 l 的方程为 $y=2(x-\frac{a}{4})$,它与 y 轴的交点为 A $(0,-\frac{a}{2})$,所以△OAF 的面积为 $\frac{1}{2}|\frac{a}{4}|\cdot|\frac{a}{2}|=4$,解得 $a=\pm 8$.所以抛物线方程为 $y^2=\pm 8x$,故选 B

【命题立意】:本题考查了抛物线的标准方程和焦点坐标以及直线的点斜式方程和三角形面积的计算.考查数形结合的数学思想,其中还隐含着分类讨论的思想,因参数 a 的符号不定而引发的抛物线开口方向的不定

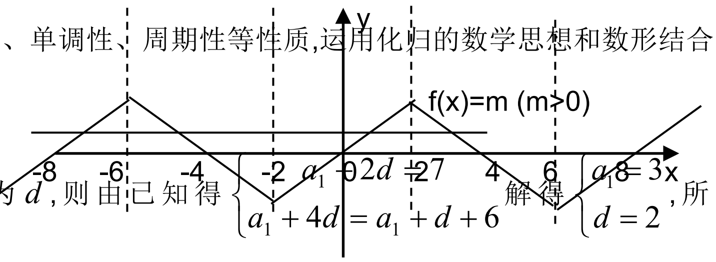
以及焦点位置的相应变化有两种情况,这里加绝对值号可以做到合二为一.

11. 【解析】:在区间$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上随机取一个数 x,即$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$时,要使$\cos x$的值介于 0 到$\frac{1}{2}$之间,需使$-\frac{\pi}{2}\le x\le-\frac{\pi}{3}$或$\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$，区间长度为$\frac{\pi}{3}$，由几何概型知$\cos x$的值介于 0 到$\frac{1}{2}$之间的概率为$\frac{\frac{\pi}{3}}{\pi}=\frac{1}{3}$.故选 A

【命题立意】:本题考查了三角函数的值域和几何概型问题,由自变量 x 的取值范围,得到函数值$\cos x$的范围,再由长度型几何概型求得.

12. 【解析】:因为$f(x)$满足$f(x-4)=-f(x)$,所以$f(x-8)=f(x)$,所以函数是以 8 为周期的周期函数,则$f(-25)=f(-1)$,$f(80)=f(0)$,$f(11)=f(3)$,又因为$f(x)$在 R 上是奇函数，$f(0)=0$,得$f(80)=f(0)=0$,$f(-25)=f(-1)=-f(1)$,而由$f(x-4)=-f(x)$得$f(11)=f(3)=-f(-3)=-f(1-4)=f(1)$,又因为$f(x)$在区间[0,2]上是增函数,所以$f(1)>f(0)=0$,所以$-f(1)<0$,即$f(-25)<f(80)<f(11)$,故选 D.

【命题立意】:本题综合考查了函数的奇偶性、单调性、周期性等性质,运用化归的数学思想和数形结合的思想解答问题.



13. 【解析】:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则由已知得$\begin{cases}a_1+2d=7\\a_1+4d=a_1+d+6\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=3\\d=2\end{cases}$,所以$a_6=a_1+5d=13$答案:13.

【命题立意】:本题考查等差数列的通项公式以及基本计算.

14. 【解析】: 设函数$y=a^x(a>0,且a\ne1\}$和函数$y=x+a$,则函数 f(x)=a^x -x-a(a>0 且 a$\ne$1)有两个零点, 就是函数$y=a^x(a>0,且a\ne1\}$与函数$y=x+a$有两个交点,由图象可知当$0<a<1$时两函数只有一个交点,不符合,当$a>1$时,因为函数$y=a^x(a>1)$的图象过点(0,1),而直线$y=x+a$所过的点（0，a）一定在点(0,1)的上方,所以一定有两个交点.所以实数 a 的取值范围是$\{a\mid a>1\}$

【命题立意】:本题考查了指数函数的图象与直线的位置关系,隐含着对指数函数的性质的考查,根据其底数的不同取值范围而分别画出函数的图象进行解答.

15. 【解析】:按照程序框图依次执行为 S=5,n=2,T=2;

S=10,n=4,T=2+4=6;S=15,n=6,T=6+6=12;

S=20,n=8,T=12+8=20;S=25,n=10,T=20+10=30>S,输出 T=30

【命题立意】:本题主要考查了循环结构的程序框图,一般都可以

反复的进行运算直到满足条件结束,本题中涉及到三个变量,

注意每个变量的运行结果和执行情况.

16. 【解析】:设甲种设备需要生产 x 天，乙种设备需要生产 y 天，该公司所需租赁费为 z 元,则 $z=200x+300y$，甲、乙两种设备生产 A,B 两类产品的情况为下表所示:

产品 设备	A 类产品 (件)(≥50)	B 类产品 (件)(≥140)	租赁费 (元)
甲设备	5	10	200
乙设备	6	20	300

则满足的关系为 $\begin{cases}5x+6y\ge 50\\10x+20y\ge 140\\x\ge 0,y\ge 0\end{cases}$ 即: $\begin{cases}x+\dfrac{6}{5}y\ge 10\\x+2y\ge 14\\x\ge 0,y\ge 0\end{cases}$,

作出不等式表示的平面区域,当 $z=200x+300y$ 对应的直线过两直线 $\begin{cases}x+\dfrac{6}{5}y=10\\x+2y=14\end{cases}$ 的交点(4,5)时，目标函数 $z=200x+300y$ 取得最低为 2300 元.

【命题立意】:本题是线性规划的实际应用问题,需要通过审题理解题意,找出各量之间的关系,最好是列成表格,找出线性约束条件,写出所研究的目标函数,通过数形结合解答问题

17. 解:

（1） $f(x)=2\sin x\cdot\dfrac{1+\cos\varphi}{2}+\cos x\sin\varphi-\sin x$

$=\sin x+\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi-\sin x$

$=\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi\quad=\sin(x+\varphi)$

因为函数 f(x)在 $x=\pi$ 处取最小值，所以 $\sin(\pi+\varphi)=-1$,

由诱导公式知 $\sin\varphi=1$,因为 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

（2）由（1）知 $f(x)=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})=\cos x$

因为 $f(A)=\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,且 A 为 ΔABC 的内角,所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$.

又因为$a=1,b=\sqrt{2}$,所以由正弦定理,得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,

也就是$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

因为$b>a$,所以$B=\dfrac{\pi}{4}$或$B=\dfrac{3\pi}{4}$.

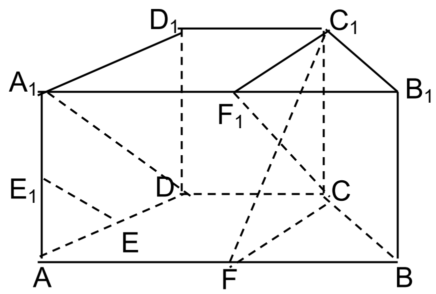
当$B=\dfrac{\pi}{4}$时,$C=\pi-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12}$;

当$B=\dfrac{3\pi}{4}$时,$C=\pi-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$.

综上所述，$C=\dfrac{7\pi}{12}$或$C=\dfrac{\pi}{12}$

【命题立意】:本题主要考查了三角函数中两角和差的弦函数公式、二倍角公式和三角函数的性质,并利用正弦定理解得三角形中的边角.注意本题中的两种情况都符合.

18. （Ⅰ）证明：



在直四棱柱 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，取 A_1B_1 的中点 F_1，

连接 A_1D，C_1F_1，CF_1，因为 AB=4, CD=2,且 AB//CD，

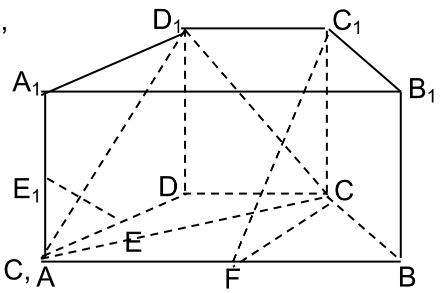
所以 CD $\overset{//}{=}$ A_1F_1 ，A_1F_1CD 为平行四边形，所以 $CF_1//A_1D$，

又因为 E、E_1 分别是棱 AD、AA_1 的中点，所以 $EE_1//A_1D$，

所以 $CF_1//EE_1$，又因为$EE_1\not\subset$平面 FCC_1，$CF_1\subset$平面 FCC_1，

所以直线 EE_1//平面 FCC_1.

（Ⅱ）连接 AC,在直棱柱中，$CC_1\perp$平面 ABCD,AC$\subset$平面 ABCD,



所以 $CC_1\perp$AC,因为底面 ABCD 为等腰梯形，AB=4, BC=2,

F 是棱 AB 的中点,所以 CF=CB=BF，△BCF 为正三角形，

$\angle BCF=60^\circ$,△ACF 为等腰三角形，且$\angle ACF=30^\circ$

所以 AC⊥BC,　又因为 BC 与 CC_1 都在平面 BB_1C_1C 内且交于点 C,

所以 AC⊥平面 BB_1C_1C,而$AC\subset$平面 D_1AC,

所以平面 D_1AC⊥平面 BB_1C_1C.

【命题立意】: 本题主要考查直棱柱的概念、线面平行和线面垂直位置关系的判定.熟练掌握平行和垂直的判定定理.完成线线、线面位置关系的转化.

19. 解：(1).设该厂本月生产轿车为 n 辆，由题意得，$\dfrac{50}{n}=\dfrac{10}{100+300}$，所以 n=2000. z=2000-100-300-150-450-600=400

(2) 设所抽样本中有 m 辆舒适型轿车,因为用分层抽样的方法在 C 类轿车中抽取一个容量为 5 的样本,所以 $\frac{400}{1000}=\frac{m}{5}$,解得 m=2 也就是抽取了 2 辆舒适型轿车,3 辆标准型轿车,分别记作 $S_1,S_2;B_1,B_2,B_3$,则从中任取 2 辆的所有基本事件为 (S_1, B_1), (S_1, B_2) , (S_1, B_3) (S_2 ,B_1), (S_2 ,B_2), (S_2 ,B_3),((S_1, S_2),(B_1 ,B_2), (B_2 ,B_3) ,(B_1 ,B_3)共 10 个,其中至少有 1 辆舒适型轿车的基本事件有 7 个基本事件: (S_1, B_1), (S_1, B_2) , (S_1, B_3) (S_2 ,B_1), (S_2 ,B_2), (S_2 ,B_3),((S_1, S_2),所以从中任取 2 辆,至少有 1 辆舒适型轿车的概率为 $\frac{7}{10}$.

(3)样本的平均数为$\bar{x}=\frac{1}{8}(9.4+8.6+9.2+9.6+8.7+9.3+9.0+8.2)=9$,

那么与样本平均数之差的绝对值不超过 0.5 的数为 9.4, 8.6, 9.2, 8.7, 9.3, 9.0 这 6 个数,总的个数为 8,所以该数与样本平均数之差的绝对值不超过 0.5 的概率为$\frac{6}{8}=0.75$.

【命题立意】:本题为概率与统计的知识内容,涉及到分层抽样以及古典概型求事件的概率问题.要读懂题意,分清类型,列出基本事件,查清个数.,利用公式解答.

20. 解:因为对任意的$n\in N^{+}$,点(n,S_n),均在函数$y=b^x+r(b>0$且$b\neq 1,b,r$均为常数)的图像上.所以得

$S_n=b^n+r$,

当$n=1$时,$a_1=S_1=b+r$,

当$n\geq 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=b^n+r-(b^{n-1}+r)=b^n-b^{n-1}=(b-1)b^{n-1}$,

当 n=2 时，$a_2=(b-1)b$

又因为{a_n}为等比数列， 所以$\frac{a_2}{a_1}=b$，即$\frac{b(b-1)}{b+r}=b$解得$r=-1$

（2）由（1）知，$n\in N^{+}$，$a_n=(b-1)b^{n-1}=2^{n-1}$，

所以 $b_n=\frac{n+1}{4a_n}=\frac{n+1}{4\times 2^{n-1}}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$

$$T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2}T_n=\qquad\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{4}{2^5}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}+\frac{n+1}{2^{n+2}}$$

两式相减,得

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^{n+2}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2^3}\times(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+2}}$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^{n+2}}$$

所以$T_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$

【命题立意】:本题主要考查了等比数列的定义,通项公式,以及已知S_n求a_n的基本题型,并运用错位相减法求出一等比数列与一等差数列对应项乘积所得新数列的前n项和T_n.

21. 解: (1)由已知得$f'(x)=ax^2+2bx+1$,令$f'(x)=0$,得$ax^2+2bx+1=0$,

$f(x)$要取得极值,方程$ax^2+2bx+1=0$必须有解,

所以$\triangle=4b^2-4a>0$,即$b^2>a$, 此时方程$ax^2+2bx+1=0$的根为

$x_1=\frac{-2b-\sqrt{4b^2-4a}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2-a}}{a}$, $x_2=\frac{-2b+\sqrt{4b^2-4a}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2-a}}{a}$,

所以$f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

当$a>0$时,

x	(-∞,x_1)	x_1	(x_1,x_2)	x_2	(x_2,+∞)
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增函数	极大值	减函数	极小值	增函数

所以$f(x)$在x_1, x_2处分别取得极大值和极小值.

当$a<0$时,

x	(-∞,x_2)	x_2	(x_2,x_1)	x_1	(x_1,+∞)
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	减函数	极小值	增函数	极大值	减函数

所以$f(x)$在x_1, x_2处分别取得极大值和极小值.

综上,当a,b满足$b^2>a$时, $f(x)$取得极值

(2)要使$f(x)$在区间$(0,1]$上单调递增,需使$f'(x)=ax^2+2bx+1\geq 0$在$(0,1]$上恒成立.

即$b\geq-\frac{ax}{2}-\frac{1}{2x}, x\in(0,1]$恒成立, 所以$b\geq(-\frac{ax}{2}-\frac{1}{2x})_{\max}$

设$g(x)=-\frac{ax}{2}-\frac{1}{2x}$, $g'(x)=-\frac{a}{2}+\frac{1}{2x^2}=\frac{a(x^2-\frac{1}{a})}{2x^2}$,

令 $g'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$ 或 $x=-\frac{1}{\sqrt{a}}$ (舍去),

当 $a>1$ 时, $0<\frac{1}{a}<1$, 当 $x\in(0,\frac{1}{\sqrt{a}})$ 时 $g'(x)>0$, $g(x)=-\frac{ax}{2}-\frac{1}{2x}$ 单调增函数;

当 $x\in(\frac{1}{\sqrt{a}},1]$ 时 $g'(x)<0$, $g(x)=-\frac{ax}{2}-\frac{1}{2x}$ 单调减函数,

所以当 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$ 时, $g(x)$ 取得最大,最大值为 $g(\frac{1}{\sqrt{a}})=-\sqrt{a}$.

所以 $b\geq-\sqrt{a}$

当 $0<a\leq1$ 时, $\frac{1}{\sqrt{a}}\geq1$, 此时 $g'(x)\geq0$ 在区间 $(0,1]$ 恒成立,所以 $g(x)=-\frac{ax}{2}-\frac{1}{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递增,

当 $x=1$ 时 $g(x)$ 最大,最大值为 $g(1)=-\frac{a+1}{2}$, 所以 $b\geq-\frac{a+1}{2}$

综上,当 $a>1$ 时, $b\geq-\sqrt{a}$; 当 $0<a\leq1$ 时, $b\geq-\frac{a+1}{2}$

【命题立意】:本题为三次函数,利用求导的方法研究函数的极值、单调性和函数的最值,函数在区间上为单调函数,则导函数在该区间上的符号确定,从而转为不等式恒成立,再转为函数研究最值.运用函数与方程的思想,化归思想和分类讨论的思想解答问题.

22. 解:（1）因为 $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}=(mx,y+1)$, $\vec{b}=(x,y-1)$,

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=mx^2+y^2-1=0$,　　即 $mx^2+y^2=1$.

当 m=0 时,方程表示两直线,方程为 $y=\pm1$;

当 $m=1$ 时, 方程表示的是圆

当 $m>0$ 且 $m\neq1$ 时,方程表示的是椭圆;

当 $m<0$ 时,方程表示的是双曲线.

(2).当 $m=\frac{1}{4}$ 时, 轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, 设圆心在原点的圆的一条切线为 $y=kx+t$, 解方程组

$\begin{cases} y=kx+t \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $x^2+4(kx+t)^2=4$, 即 $(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0$,

要使切线与轨迹 E 恒有两个交点 A,B,

则使△= $64k^2t^2-16(1+4k^2)(t^2-1)=16(4k^2-t^2+1)>0$,

即$4k^2-t^2+1>0$,即$t^2<4k^2+1$, 且$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{8kt}{1+4k^2}\\ x_1x_2=\dfrac{4t^2-4}{1+4k^2}\end{cases}$

$y_1y_2=(kx_1+t)(kx_2+t)=k^2x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2=\dfrac{k^2(4t^2-4)}{1+4k^2}-\dfrac{8k^2t^2}{1+4k^2}+t^2=\dfrac{t^2-4k^2}{1+4k^2}$,

要使$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$, 需使$x_1x_2+y_1y_2=0$,即$\dfrac{4t^2-4}{1+4k^2}+\dfrac{t^2-4k^2}{1+4k^2}=\dfrac{5t^2-4k^2-4}{1+4k^2}=0$,

所以$5t^2-4k^2-4=0$, 即$5t^2=4k^2+4$且$t^2<4k^2+1$, 即$4k^2+4<20k^2+5$恒成立.

所以又因为直线$y=kx+t$为圆心在原点的圆的一条切线,

所以圆的半径为$r=\dfrac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$,$r^2=\dfrac{t^2}{1+k^2}=\dfrac{\frac{4}{5}(1+k^2)}{1+k^2}=\dfrac{4}{5}$, 所求的圆为$x^2+y^2=\dfrac{4}{5}$.

当切线的斜率不存在时,切线为$x=\pm\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$,与$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$交于点$(\dfrac{2}{5}\sqrt{5},\pm\dfrac{2}{5}\sqrt{5})$或$(-\dfrac{2}{5}\sqrt{5},\pm\dfrac{2}{5}\sqrt{5})$也满足$OA\perp OB$.

综上, 存在圆心在原点的圆$x^2+y^2=\dfrac{4}{5}$, 使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A,B, 且$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$.

(3) 当$m=\dfrac{1}{4}$时, 轨迹 E 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$, 设直线l的方程为$y=kx+t$, 因为直线l与圆C:$x^2+y^2=R^2$ (1<R<2)相切于 A_1, 由（2）知$R=\dfrac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$, 即$t^2=R^2(1+k^2)$ ①

因为l与轨迹 E 只有一个公共点 B_1,

由（2）知$\begin{cases}y=kx+t\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$得$x^2+4(kx+t)^2=4$,

即$(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0$有唯一解

则△=$64k^2t^2-16(1+4k^2)(t^2-1)=16(4k^2-t^2+1)=0$, 即$4k^2-t^2+1=0$, ②

由①②得$\begin{cases} t^2=\dfrac{3R^2}{4-R^2} \\ k^2=\dfrac{R^2-1}{4-R^2} \end{cases}$,　此时 A,B 重合为 $B_1(x_1,y_1)$点,

由$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{8kt}{1+4k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{4t^2-4}{1+4k^2} \end{cases}$ 中 $x_1=x_2$,所以,$x_1{}^2=\dfrac{4t^2-4}{1+4k^2}=\dfrac{16R^2-16}{3R^2}$,

$B_1(x_1,y_1)$点在椭圆上,所以 $y_1{}^2=1-\dfrac{1}{4}x_1{}^2=\dfrac{4-R^2}{3R^2}$,所以$|OB_1|^2=x_1{}^2+y_1{}^2=5-\dfrac{4}{R^2}$,

在直角三角形 OA_1B_1 中,$|A_1B_1|^2=|OB_1|^2-|OA_1|^2=5-\dfrac{4}{R^2}-R^2=5-(\dfrac{4}{R^2}+R^2)$ 因为$\dfrac{4}{R^2}+R^2\geq 4$当且仅当 $R=\sqrt{2}\in(1,2)$ 时取等号,所以$|A_1B_1|^2\leq 5-4=1$,即

当 $R=\sqrt{2}\in(1,2)$ 时$|A_1B_1|$取得最大值,最大值为 1.

【命题立意】:本题主要考查了直线与圆的方程和位置关系,以及直线与椭圆的位置关系,可以通过解方程组法研究有没有交点问题,有几个交点的问题.