2000年北京高考理科数学真题及答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分．第Ⅰ卷1至2页．第Ⅱ卷3至8页．共150分．考试时间120分钟．

第Ⅰ卷（选择题共60分）

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上．

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮干净后，再选涂其它答案，不能答在试题卷上．

3．考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回．

参考公式：

三角函数和差化积公式

$$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c'+c)l$$

其中c′、c分别表示上、下底面周长，l表示斜高或母线长

台体的体积公式

$$V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$$

其中S′、S分别表示上、下底面积，h表示高

一、选择题：本大题共14小题；第(1)—(10)题每小题4分，第(11)—(14)题每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

(1)复数$z_1=3+i$，$z_2=1-i$，则$z=z_1\cdot z_2$在复平面内的对应点位于［　　］

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

(2)设全集$I=\{a,b,c,d,e\}$，集合$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么$\overline{M}\cap\overline{N}$是［　　］

A．$\varnothing$　　B．{d}　　C．{a,c}　　D．{b,e}

（3）双曲线$\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$的两条渐近线互相垂直，那么该双曲线的离心率是［　　］

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

(4)曲线 xy=1 的参数方程是　　［　　］

A.$\begin{cases}x=t^{\frac{1}{2}}\\ y=t^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$　B.$\begin{cases}x=\sin a\\ y=\csc a\end{cases}$

C.$\begin{cases}x=\cos a,\\ y=\sec a\end{cases}$　D.$\begin{cases}x=tga,\\ y=ctga.\end{cases}$

(5)一个圆锥的底面直径和高都同一个球的直径相等，那么圆锥与球的体积之比是［　　］

A. 1∶3　B. 2∶3　C. 1∶2　D. 2∶9

(6)直线 $\theta=\alpha$ 和直线 $\rho\sin(\theta-\alpha)=1$ 的位置关系是　　［　　］

A. 垂直　B. 平行　C. 相交但不垂直　D. 重合

(7)函数 y=lg|x|　　［　　］

A. 是偶函数，在区间$(-\infty,0)$上单调递增

B. 是偶函数，在区间$(-\infty,0)$上单调递减

C. 是奇函数，在区间$(0,+\infty)$上单调递增

D. 是奇函数，在区间$(0,+\infty)$上单调递减

(8)从单词“equation”中选取 5 个不同的字母排成一排，含有“qu”(其中“qu”相连且顺序不变)的不同排列共有

A. 120 个　B. 480 个　C. 720 个　D. 840 个

(9)椭圆短轴长是 2，长轴是短轴的 2 倍，则椭圆的中心到其准线距离是［　　］

A. $\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$　B. $\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$　C. $\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$　D. $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

(10)函数$y=\dfrac{1}{2+\sin x+\cos x}$的最大值是　　［　　］

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$　C. $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　D. $-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(11)设复数$z_1=2\sin\theta+i\cos\theta\ (\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2})$在复平面上对应向量

$\overrightarrow{OZ_1}$，将$\overrightarrow{OZ_1}$按顺时针方向旋转$\dfrac{3}{4}\pi$后得到向量$\overrightarrow{OZ_2}$，$\overrightarrow{OZ_2}$对应的复数为

$z_2=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，则$tg\varphi=$　　［　　］

A. $\dfrac{2tg\theta+1}{2tg\theta-1}$　　　B. $\dfrac{2tg\theta-1}{2tg\theta+1}$

C. $\dfrac{1}{2tg\theta+1}$　　　D. $\dfrac{1}{2tg\theta-1}$

(12)设α，β是一个钝角三角形的两个锐角，下列四个不等式中不正确的是 [　　]

A. $tg\alpha\, tg\beta<1$　　　B. $\sin\alpha+\sin\beta<\sqrt{2}$

C. $\cos\alpha+\cos\beta>1$　　　D. $\frac{1}{2}tg(\alpha+\beta)<tg\frac{\alpha+\beta}{2}$

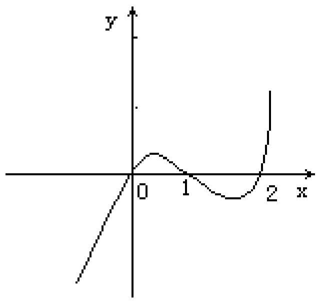
(13)已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}=0$,则有

[　　]

A. $a_1+a_{101}>0$　　　B. $a_2+a_{100}<0$

C. $a_3+a_{99}=0$　　　D. $a_{51}=51$

(14)已知函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$的图象如右图，则　[　　]



A. b∈(-∞,0)　　B. b∈(0,1)　　C. b∈(1,2)　　D. b∈(2,+∞)

第Ⅱ卷（非选择题）

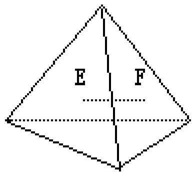
注意事项：

1. 第Ⅰ卷共6页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中.
2. 答卷前将密封线内的项目写清楚.

二、填空题：本大题共4小题；每小题4分，共16分，把答案填在题中横线上.

(15)函数$y=\cos(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{4})$的最小正周期是_______.

(16)下图是一体积为72的正四面体，连结两个面的重心E、F，则线段EF的长是______.



(17) $(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^{10}$展开式中的常数项是______.

(18)在空间，下列命题正确的是______.（注：把你认为正确的命题的序号都填上）

①如果两直线a、b分别与直线l平行，那么a∥b

②如果直线a与平面β内的一条直线b平行，那么a∥β

③如果直线a与平面β内的两条直线b、c都垂直，那么a⊥β

④如果平面β内的一条直线a垂直平面γ，那么β⊥γ

三、解答题：本大题共6小题；共74分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(19)（本小题满分12分）

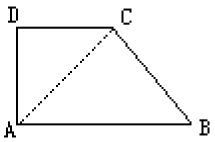
在△ABC中，角A、B、C对边分别为a、b、c．证明：

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$

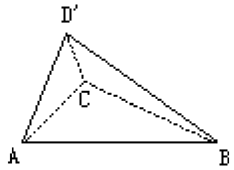
(20)在直角梯形ABCD中，$\angle D=\angle BAD=90^\circ$，$AD=DC=\frac{1}{2}AB$ =a（如图一），将△ADC沿AC折起，使D到D′．记面ACD′为α，面ABC为β，面BCD′为γ.

(Ⅰ)若二面角α-AC-β为直二面角（如图二），求二面角β-BC-γ的大小;

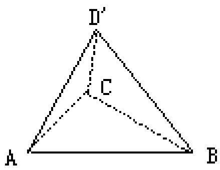
(Ⅱ)若二面角α-AC-β为60°（如图三），求三棱锥D′-ABC的体积.



图一



图二



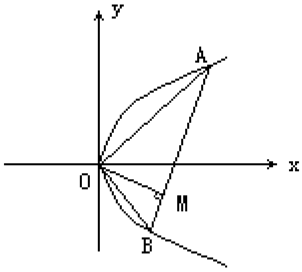
图三

(21)（本小题满分12分）

设函数f(x)=|lgx|，若0＜a＜b，且(a)＞f(b)，证明：ab＜1.

(22)（本小题满分12分）

如图，设点A和B为抛物线$y^2=4px(p>0)$上原点以外的两个动点.已知OA⊥OB，OM⊥AB，求点M的轨迹方程，并说明它表示什么曲线.



(23)（本小题满分 12 分）

某地区上年度电价为 0.8 元/kW・h，年用电量为 akW・h，本年度计划将电价降到 0.55 元/kW・h 至 0.75 元/kW・h 之间，而用户期望电价为 0.4 元/kW・h，经测算，下调电价后新增的用电量与实际电价和用户期望电价的差成反比（比例系数为 k）．该地区电力的成本价为 0.3 元/kW・h.

(Ⅰ)写出本年度电价下调后，电力部门的收益 y 与实际电价 x 的函数关系式；

(Ⅱ)设 k=0.2a，当电价最低定为多少时仍可保证电力部门的收益比上年至少增长 20%?

（注：收益=实际用电量×(实际电价-成本价)）

(24)（本小题满分 14 分）

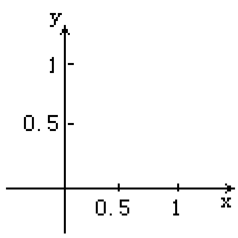
$$已知函数f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in[0,\frac{1}{2}) \\ f_2(x), & x\in[\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

其中$f_1(x)=-2(x-\frac{1}{2})^2+1,\ f_2(x)=-2x+2$

(Ⅰ)在下面坐标系上画出$y=f(x)$的图象

(Ⅱ)设$y=f_2(x)(x\in[\frac{1}{2},1])$的反函数为$y=g(x),a_1=1,a_2=g(a_1),\cdots,$ $a_n=g(a_{n-1})$; 求数列$\{a_n\}$的通项公式, 并求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$;

(Ⅲ)若$x_0\in[0,\frac{1}{2}),x_1=f(x_0),f(x_1)=x_0$, 求$x_0$.



绝密★启用前

2000年普通高等学校春季招生考试（北京、安徽卷）
数学试题（理工农医类）参考解答及评分标准

说明：

一、本解答指出了每题考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变试题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

一、选择题 本题考查基本知识和基本运算。第(1)—(10)题每小题4分，第(11)—(14)题每小题5分，满分60分。

(1)D	(2)A	(3)C	(4)D	(5)C
(6)B	(7)B	(8)B	(9)D	(10)B
(11)A	(12)D	(13)C	(14)A	

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题4分，满分16分。

(15) 3　　(16) $2\sqrt{2}$　　(17) 210　　(18) ①，④

三、解答题

(19)本小题主要考查三角形的正弦定理、余弦定理等基础知识，考查三角函数简单的变形技能，满分12分。

证明：由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$

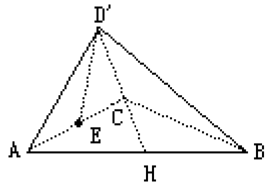
整理得 $$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{c\cos B-b\cos A}{c}$$

依正弦定理，有 $,\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C},\quad \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C},$

∴ $$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A}{\sin C}$$

$$=\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$

(20)本小题主要考查空间线面关系，及运算、推理、空间想象能力，满分12分。



解：(Ⅰ)在直角梯形 ABCD 中，由已知△DAC 为等腰直角三角形，

∴ $AC=\sqrt{2}a,\quad \angle CAB=45^\circ$

过C作$CH\perp AB$，由$AB=2a$，

可推得 $AC=BC=\sqrt{2}a$.

∴$AC\perp BC$.

取 AC 的中点 E，连结 D′E，

则 D′E⊥AC。

又 ∵二面角 a-AC-β 为直角二面角，

∴D′E⊥β。

又∵$BC\subset$平面β

∴$BC\perp D'E$

∴$BC\perp a$，而$D'C\subset a$，

∴$BC\perp D'C$

∴∠D′CA 为二面角β-BC-γ的平面角。

由于∠D′CA=45°，

∴ 二面角β-BC-γ为 45°。

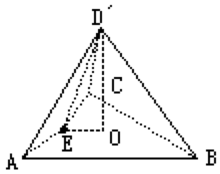
(Ⅱ)取 AC 的中点 E，连结 D′E，再过 D′作 D′O⊥β，垂足为 O，连结 OE。

∵AC⊥D′E，

∴AC⊥OE。

∴∠D′EO 为二面角α-AC-β的平面角，

∴∠D′EO=60°



在Rt△D′OE中，$D'E=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

$$\therefore V_{D'-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot D'O,$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot D'O$$

$$=\frac{1}{6}\times\sqrt{2}a\times\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{6}}{4}a$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{12}a^3$$

(21)本小题主要考查函数的单调性、对数函数的性质、运算能力，考查分析问题解决问题的能力，满分12分。

证明：由已知

$$f(x)=|\lg x|=\begin{cases}\lg x,(1\leqslant x<+\infty),\\-\lg x,(0<x<1)\end{cases}$$

∵$0<a<b$，$f(a)>f(b)$，

∴a、b不能同时在区间$[1,+\infty)$上，又由于$0<a<b$，故必有$a\in(0,1)$；

若$b\in(0,1)$，显然有$ab<1$，

若$b\in[1,+\infty)$，由$f(a)-f(b)>0$，

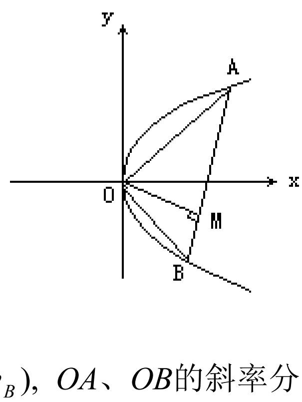
有$-\lg a-\lg b>0$

故　$\lg ab<0$,

∴$ab<1$

(2)本小题主要考查直线、抛物线的基础知识，考查由动点求轨迹方程的基本方法以及方程化简的基本技能，满分12分。

解：如图，点A，B在抛物线$y^2=4px$上，



设$A(\frac{y_A^2}{4p},y_A)$，$B(\frac{y_B^2}{4p},y_B)$，OA、OB的斜率分别为k_{OA}、k_{OB}

$$\therefore\quad k_{OA}=\frac{y_A}{\frac{y_A^2}{4p}}=\frac{4p}{y_A},k_{OB}=\frac{4p}{y_B}$$

由OA⊥OB，得$k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{16p^2}{y_Ay_B}=-1$, ①

依点 A 在 AB 上，得直线 AB 方程

$$(y_A+y_B)(y-y_A)=4p(x-\frac{y_A^2}{4p}),\quad ②$$

由OM⊥AB，得直线OM方程 $y=\dfrac{y_A+y_B}{-4p}x$ ③

设点M(x, y)，则x,y满足②、③两式，将②式两边同时乘以$-\dfrac{x}{4p}$，

并利用③式整理得

$$\frac{x}{4p}y_A^2+yy_A-(x^2+y^2)=0\quad ④$$

由③、④两式得 $-\dfrac{x}{4p}y_Ay_B-(x^2+y^2)=0$,

由①式知， $y_Ay_B=-16p^2$,

$\therefore x^2+y^2-4px=0$

因为 A、B 是原点以外的两点，所以 $x\neq0$

所以点 M 的轨迹是以(2p,0)为圆心，以 2p 为半径的圆，去掉坐标原点。

(23)本小题主要考查建立函数关系、解不等式等基础知识，考查综合应用数学知识、思想和方法解决实际问题的能力，满分 12 分。

解(Ⅰ): 设下调后的电价为x元/kW·h, 依题意知用电量增至$\dfrac{k}{x-0.4}+a$, 电力部门的收益为

$$y=(\frac{k}{x-0.4}+a)(x-0.3)(0.55\leqslant x\leqslant0.75).$$

(Ⅱ)依题意有

$$\begin{cases}(\dfrac{0.2a}{x-0.4}+a)(x-0.3)\geqslant[a\times(0.8-0.3)](1+20\%),\\0.55\leqslant x\leqslant0.75\end{cases}$$

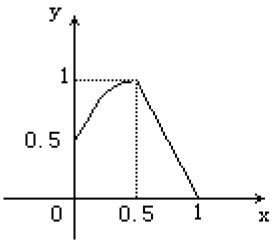
整理得 $\begin{cases}x^2-1.1x+0.3\geqslant0,\\0.55\leqslant x\leqslant0.75\end{cases}$

解此不等式得 $0.60\leqslant x\leqslant0.75$

答：当电价最低定为0.60元/kW·h仍可保证电力部门的收益比上年增长20%。

(24)本小题主要考查函数及数列的基本概念和性质，考查分析、归纳、推理、运算能力，满分14分。

解(Ⅰ)：函数图象：



说明: 图象过$(0,\frac{1}{2})$、$(\frac{1}{2},1),(1,0)$点; 在区间$[0,\frac{1}{2})$上的图象为上凸的曲线段；在区间$[\frac{1}{2},1]$上的图象为直线段.

(Ⅱ): $f_2(x)=-2x+2,\ x\in[\frac{1}{2},1]$的反函数为:

$$y=1-\frac{x}{2},\ \ x\in[0,1].$$

由已知条件得:

$$a_1=1$$

$$a_2=1-\frac{1}{2}a_1=1-\frac{1}{2},$$

$$a_3=1-\frac{1}{2}a_2=1-\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2,$$

$$a_4=1+(-\frac{1}{2})^1+(-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^3,$$

…………

$$\therefore a_n=(-\frac{1}{2})^0+(-\frac{1}{2})^1+(-\frac{1}{2})^2+\cdots+(-\frac{1}{2})^{n-1}$$

$$=\frac{1-(-\frac{1}{2})^n}{1-(-\frac{1}{2})}$$

即 $a_n=\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n],$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}[1-(-\frac{1}{2})^n]=\frac{2}{3}$$

(Ⅲ)：由已知$x_0\in[0,\frac{1}{2})$,

$\therefore x_1=f_1(x_0)=1-2(x_0-\frac{1}{2})^2$,

由$f_1(x)$的值域, 得$x_1\in[\frac{1}{2},1]$.

$\therefore f_2(x_1)=2-2[1-2(x_0-\frac{1}{2})^2]=4(x_0-\frac{1}{2})^2$.

由$f_2(x_1)=x_0$，整理　　$4x_0^2-5x_0+1=0$,

解得　　　　$x_0=1$，$x_0=\frac{1}{4}$,

因为 $x_0\in[0,\frac{1}{2})$，所以$x_0=\frac{1}{4}$.