2007年黑龙江高考文科数学真题及答案

注意事项：

1. 本试题卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共4页，总分150分，考试时间120分钟．
2. 答题前，考生须将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在本试题卷指定的位置上．
3. 选择题的每小题选出答案后，用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，不能答在试题卷上．
4. 非选择题必须使用0.5毫米的黑色字迹的签字笔在答题卡上书写，字体工整，笔迹清楚
5. 非选择题必须按照题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答．超出答题区域或在其它题的答题区域内书写的答案无效；在草稿纸、本试题卷上答题无效．
6. 考试结束，将本试题卷和答题卡一并交回．

第Ⅰ卷（选择题）

本卷共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

参考公式：

如果事件 A，B 互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A，B 相互独立，那么

$P(A\bullet B)=P(A)\bullet P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么

n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\ldots，n)$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中 R 表示球的半径

球的体积公式

$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

一、选择题

1．$\cos 330^\circ=$（　　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$-\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2．设集合 $U=\{1,2,3,4\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{2,4\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$（　　）

A．$\{2\}$　　B．$\{3\}$　　C．$\{1,2,4\}$　　D．$\{1,4\}$

3．函数 $y=|\sin x|$ 的一个单调增区间是（　　）

A．$\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$　B．$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$　　C．$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$　　D．$\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$

4．下列四个数中最大的是（　　）

A．$(\ln 2)^2$　　B．$\ln(\ln 2)$　　C．$\ln\sqrt{2}$　　D．$\ln 2$

5．不等式$\dfrac{x-2}{x+3}>0$的解集是（　　）

A．$(-3,2)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$　　D．$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

6．在$\triangle ABC$中，已知D是AB边上一点，若$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，则$\lambda=$（　　）

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$-\dfrac{1}{3}$　　D．$-\dfrac{2}{3}$

7．已知三棱锥的侧棱长的底面边长的 2 倍，则侧棱与底面所成角的余弦值等于（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8．已知曲线$y=\dfrac{x^2}{4}$的一条切线的斜率为$\dfrac{1}{2}$，则切点的横坐标为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

9．把函数$y=e^x$的图像按向量$\boldsymbol{a}=(2,3)$平移，得到$y=f(x)$的图像，则$f(x)=$（　　）

A．e^x+2　　B．e^x-2　　C．e^{x-2}　　D．e^{x+2}

10．5 位同学报名参加两个课外活动小组，每位同学限报其中的一个小组，则不同的报名方法共有（　　）

A．10 种　　B．20 种　　C．25 种　　D．32 种

11．已知椭圆的长轴长是短轴长的 2 倍，则椭圆的离心率等于（　　）

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12．设F_1，F_2分别是双曲线$x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$的左、右焦点．若点P在双曲线上，且$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则$\left|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right|=$（　　）

A．$\sqrt{10}$　　B．$2\sqrt{10}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$2\sqrt{5}$

第 II 卷（非选择题）

本卷共 10 题，共 90 分

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．一个总体含有 100 个个体，以简单随机抽样方式从该总体中抽取一个容量为 5 的样本，则指定的某个个体被抽到的概率为________.

14．已知数列的通项 $a_n=-5n+2$，则其前 n 项和 $S_n=$__________.

15．一个正四棱柱的各个顶点在一个直径为 2cm 的球面上．如果正四棱柱的底面边长为 1cm，那么该棱柱的表面积为___________cm^2.

16．$(1+2x^2)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^8$ 的展开式中常数项为__________．(用数字作答)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．(本小题满分 10 分)

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q<1$，前 n 项和为 S_n．已知 $a_3=2$，$S_4=5S_2$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18．(本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中，已知内角 $A=\dfrac{\pi}{3}$，边 $BC=2\sqrt{3}$．设内角 $B=x$，周长为 y.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式和定义域;

(2) 求 y 的最大值.

19．(本小题满分 12 分)

从某批产品中，有放回地抽取产品二次，每次随机抽取 1 件，假设事件 A：“取出的 2 件产品中至多有 1 件是二等品”的概率 $P(A)=0.96$.

(1) 求从该批产品中任取 1 件是二等品的概率 p；

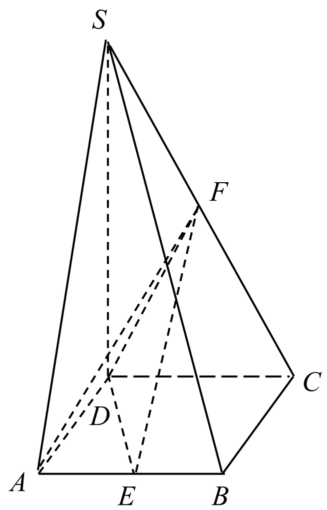
(2) 若该批产品共 100 件，从中任意抽取 2 件，求事件 B：“取出的 2 件产品中至少有一件二等品”的概率 $P(B)$.

20．(本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，
底面 $ABCD$ 为正方形，侧棱 $SD\perp$ 底面 $ABCD$，E，F 分别为 AB，SC 的中点.

(1) 证明 $EF\parallel$ 平面 SAD；

(2) 设 $SD=2DC$，求二面角 $A-EF-D$ 的大小.



21．(本小题满分 12 分)

在直角坐标系 xOy 中，以 O 为圆心的圆与直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 相切.

（1）求圆 O 的方程；

（2）圆 O 与 x 轴相交于 A，B 两点，圆内的动点 P 使 $|PA|,|PO|,|PB|$ 成等比数列，求 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3-bx^2+(2-b)x+1$

在 $x=x_1$ 处取得极大值，在 $x=x_2$ 处取得极小值，且 $0<x_1<1<x_2<2$.

（1）证明 $a>0$；

（2）若 $z=a+2b$, 求 z 的取值范围。

参考答案

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则.

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度．可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

3．解答右侧所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

4．只给整数分数．选择题和填空题不给中间分.

一、选择题

1．C　2．B　3．C　4．D　5．C　6．A

7．A　8．A　9．C　10．D　11．D　12．B

二、填空题

13．$\dfrac{1}{20}$　14．$\dfrac{-5n^2-n}{2}$　15．$2+4\sqrt{2}$

三、解答题

17．解：由题设知 $a_1\neq 0$，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，

$$则\begin{cases} a_1q^2=2, \\ \dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=5\times\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}. \end{cases}\quad ②$$

由②得 $1-q^4=5(1-q^2)$，$(q^2-4)(q^2-1)=0$，$(q-2)(q+2)(q-1)(q+1)=0$，

因为$q<1$，解得$q=-1$或$q=-2$.

当$q=-1$时，代入①得$a_1=2$，通项公式$a_n=2\times(-1)^{n-1}$；

当$q=-2$时，代入①得$a_1=\frac{1}{2}$，通项公式$a_n=\frac{1}{2}\times(-2)^{n-1}$.

18．解：（1）$\triangle ABC$的内角和$A+B+C=\pi$，由$A=\frac{\pi}{3}$，$B>0$，$C>0$得$0<B<\frac{2\pi}{3}$.

应用正弦定理，知

$$AC=\frac{BC}{\sin A}\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\sin x=4\sin x,$$

$$AB=\frac{BC}{\sin A}\sin C=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right).$$

因为$y=AB+BC+AC$，

所以$y=4\sin x+4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+2\sqrt{3}\left(0<x<\frac{2\pi}{3}\right)$，

（2）因为$y=4\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)+2\sqrt{3}$

$$=4\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}\right),$$

所以，当$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{3}$时，$y$取得最大值$6\sqrt{3}$.

19.（1）记A_0表示事件“取出的2件产品中无二等品”，

A_1表示事件“取出的2件产品中恰有1件二等品”.

则A_0，A_1互斥，且$A=A_0+A_1$，故

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_0+A_1)\\&=P(A_0)+P(A_1)\\&=(1-p)^2+C_2^1p(1-p)\\&=1-p^2\end{aligned}$$

于是$0.96=1-p^2$.

解得 $p_1=0.2$，$p_2=-0.2$（舍去）.

（2）记 B_0 表示事件“取出的 2 件产品中无二等品”，

则 $B=\overline{B_0}$.

若该批产品共 100 件，由（1）知其中二等品有 $100\times0.2=20$ 件，故 $P(B_0)=\dfrac{\mathrm{C}_{80}^2}{\mathrm{C}_{100}^2}=\dfrac{316}{495}$.

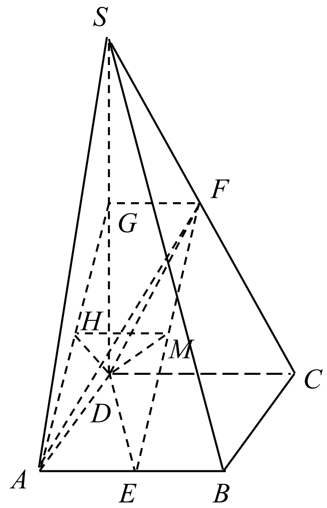
$$P(B)=P(\overline{B_0})=1-P(B_0)=1-\frac{316}{495}=\frac{179}{495}$$

20．解法一：

（1）作 $FG\parallel DC$ 交 SD 于点 G，则 G 为 SD 的中点.

连结 AG，$FG \underline{\underline{\parallel}} \dfrac{1}{2}CD$，又 $CD \underline{\underline{\parallel}} AB$，

故 $FG \underline{\underline{\parallel}} AE$，$AEFG$ 为平行四边形.



$EF\parallel AG$，又 $AG\subset$ 平面 SAD，$EF\not\subset$ 平面 SAD .

所以 $EF\parallel$ 平面 SAD .

（2）不妨设 $DC=2$，则 $SD=4$，$DG=2$，$\triangle ADG$ 为等腰直角三角形.

取 AG 中点 H，连结 DH，则 $DH\perp AG$.

又 $AB\perp$ 平面 SAD，所以 $AB\perp DH$，而 $AB\cap AG=A$，

所以 $DH\perp$ 面 AEF .

取 EF 中点 M，连结 MH，则 $HM\perp EF$.

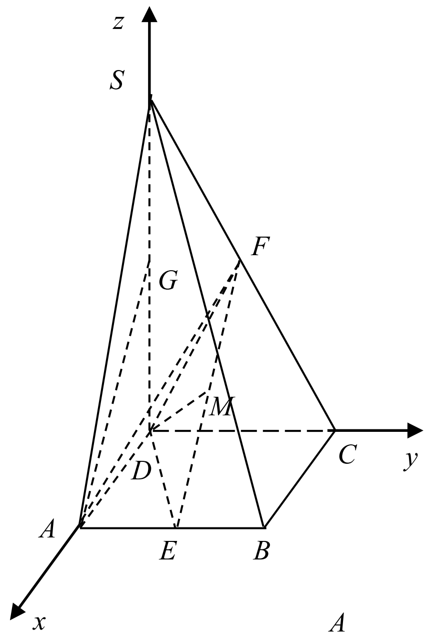
连结 DM，则 $DM\perp EF$.

故 $\angle DMH$ 为二面角 $A-EF-D$ 的平面角

$$\tan\angle DMH=\frac{DH}{HM}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}.$$

所以二面角 $A-EF-D$ 的大小为 $\arctan\sqrt{2}$.

解法二：（1）如图，建立空间直角坐标系 $D-xyz$.



设 $A(a,0,0)$，$S(0,0,b)$，则 $B(a,a,0)$，$C(0,a,0)$，

$E\left(a,\dfrac{a}{2},0\right)$，$F\left(0,\dfrac{a}{2},\dfrac{b}{2}\right)$，

$\overrightarrow{EF}=\left(-a,0,\dfrac{b}{2}\right)$.

取 SD 的中点 $G\left(0,0,\frac{b}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AG}=\left(-a,0,\frac{b}{2}\right)$.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AG}$，$EF$ // AG，$AG\subset$ 平面 SAD，$EF\not\subset$ 平面 SAD，

所以 EF // 平面 SAD.

（2）不妨设 $A(1,0,0)$，则 $B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$S(0,0,2)$，$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

EF 中点 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{MD}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{EF}=0$，$MD\perp EF$

又 $\overrightarrow{EA}=\left(0,-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{EA}\bullet\overrightarrow{EF}=0$，$EA\perp EF$，

所以向量 $\overrightarrow{MD}$ 和 $\overrightarrow{EA}$ 的夹角等于二面角 $A-EF-D$ 的平面角.

$$\cos<\overrightarrow{MD},\overrightarrow{EA}>=\frac{\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{EA}}{\left|\overrightarrow{MD}\right|\bullet\left|\overrightarrow{EA}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

所以二面角 $A-EF-D$ 的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

21．解：（1）依题设，圆 O 的半径 r 等于原点 O 到直线 $x-\sqrt{3}y=4$ 的距离，

即 $r=\frac{4}{\sqrt{1+3}}=2$.

得圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$.

（2）不妨设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，$x_1<x_2$. 由 $x^2=4$ 即得

$A(-2,0)$，$B(2,0)$.

设 $P(x, y)$，由 $|PA|,|PO|,|PB|$ 成等比数列，得

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2}\bullet\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x^2+y^2,$$

即 $x^2-y^2=2$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}&=(-2-x,-y)\bullet(2-x,-y)\\&=x^2-4+y^2\\&=2(y^2-1).\end{aligned}$$

由于点 P 在圆 O 内，故 $\begin{cases}x^2+y^2<4,\\x^2-y^2=2.\end{cases}$

由此得 $y^2<1$．

所以 $\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 $[-2,0)$．

22．解：求函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=ax^2-2bx+2-b$．

（Ⅰ）由函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得极大值，在 $x=x_2$ 处取得极小值，知 x_1，x_2 是 $f'(x)=0$ 的两个根．

所以 $f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

当 $x<x_1$ 时，$f(x)$ 为增函数，$f'(x)>0$，由 $x-x_1<0$，$x-x_2<0$ 得 $a>0$．

（Ⅱ）在题设下，$0<x_1<1<x_2<2$ 等价于 $\begin{cases}f'(0)>0\\f'(1)<0\\f'(2)>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2-b>0\\a-2b+2-b<0\\4a-4b+2-b>0\end{cases}$．

化简得 $\begin{cases}2-b>0\\a-3b+2<0\\4a-5b+2>0\end{cases}$．

此不等式组表示的区域为平面 aOb 上三条直线：$2-b=0$，$a-3b+2=0,4a-5b+2=0$．

所围成的 $\triangle ABC$ 的内部，其三个顶点分别为：$A\left(\dfrac{4}{7},\dfrac{6}{7}\right)$，$B(2,2)$，$C(4,2)$．

z 在这三点的值依次为 $\dfrac{16}{7},6,8$．

所以 z 的取值范围为 $\left(\dfrac{16}{7},8\right)$．