2013年普通高等学校招生全国统一考试（重庆卷）

数学试题卷（理工农医类）

点评：今年是重庆市在新课标下的第一年高考，数学（文/理）试卷充分体现了新课标的精神，在考查传统基础知识的同时，突出考察了新课标下新知识，如算法框图，统计茎叶图、回归分析、立几三视图、填空题三选二中的平面几何及参数方程与极坐标。考查了学生的空间想象能力，抽象概括能力，推理论证及数据处理、运算求解能力。整套试卷注重文理差异，利于人才选拔，推进新课程改革，试题过渡平稳，衔接有序，稳中求变，变中有律。

一、全面考查了课改中的核心与主干知识

今年文、理两套试卷均对新课标中的函数与导数、立体几何、解析几何、概率、三角函数等核心内容作了重点考查，新增内容有选择性地在选择、填空题中出现，知识点分布合理，层次分明，利于较全面地考查所学内容。

二、注重了数学本质的考查，同时强调了数学能力立意

试卷也注重在知识与方法交汇处命题，例如文科（15）题将三角函数与不等式融合，理科（8）将对数性质与程序框图相结合，理科（18）、文科（20）将函数与导数有机结合，特别值得关注的是，今年理科（22）题新颖别致有创意，与往年命题风格完全不同，既考查了分类讨论、反证法、构造法等多种数学思想，又是一道以能力立意的好题，有较大的开放度和灵活性。

三、注重文理有别，难易适中、贴近生活

本次考试理科试题题目标号多增加一个，学生实际答题个数与去年一样。与去年相比，解答题题目位置和内容都稍有变化，知识考查个数增多，难度略比去年大；文科题目个数不变，难度大致与去年相当，文理差异突出，但也有共同之处。即1、2题均相同，相关题有6个题，但考查知识点不尽相同，其余试题都不同。充分体现了文理考生不同数学要求的考查目标，命题更具有针对性。数学源于生活，考题接近生活，例如理18题“摸球”概率题，文17题的线性相关问题和20题水池建造问题均与现实生活息息相关。

总之，今年文理试题仍保持了重庆以往命题风格，既关注面向全体同学，又能较好的区分数学能力不同的考生。有利于今后的考试导向，有利于提高学生的学习积极性，有利于高中数学课堂改革，有利于体现新课改精神。

一．选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个备选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

（1）已知集合 $U=\{1,2,3,4\}$，集合 $A=\{1,2\}$， $B=\{2,3\}$，则 $C_U(A\cup B)=$

（A）$\{1,3,4\}$　　（B）$\{3,4\}$　　（C）$\{3\}$　　（D）$\{4\}$

解析：本题考查集合的混合运算，解题时要细心，不要遗漏元素．$A\cup B=\{1,2,3\}$，$C_U(A\cup B)=\{4\}$

答案 D

（2）命题“对任意 $x\in R$，都有 $x^2\geq 0$”的否定为

（A）对任意 $x\in R$，使得 $x^2<0$　　（B）不存在 $x\in R$，使得 $x^2<0$

（C）存在 $x_0\in R$，都有 $x_0^2\geq 0$　　（D）存在 $x_0\in R$，都有 $x_0^2<0$

解析：掌握全称命题的否定是特称命题是解题的关键．根据命题“∀x∈R，p（x）”的否定是“∃x_0∈R，￢p（x）”，∴命题：“对任意 x∈R，都有 $x^2\geq 0$”的否定是“∃x_0∈R，使得 $x_0^2<0$”．

答案 D

（3）$\sqrt{(3-a)(a+6)}$（$-6\leq a\leq 3$）的最大值为

（A）9　　（B）$\dfrac{9}{2}$　　（C）3　　（D）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

解析：本题考查均值定理求最值。$\sqrt{(3-a)(a+6)}\leq\dfrac{3-a+a+6}{2}=\dfrac{9}{2}$，当且仅当 $3-a=a+6$ 即 $a=-\dfrac{3}{2}$

答案 B

（4）以下茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名学生在一次英语听力测试中的成绩（单位：分）．

甲组			乙组		
	9	0	9		
x	2	1	5	y	8
7	4	2	4		

已知甲组数据的中位数为 15，乙组数据的平均数为 16.8，则 x、y 的值分别为

（A）2、5　　（B）5、5

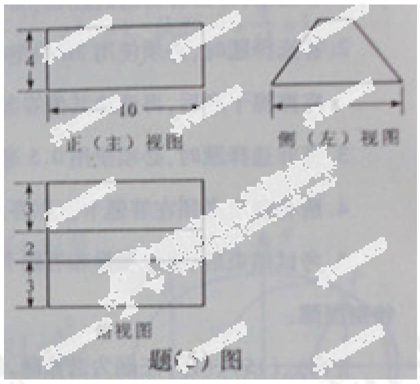
（C）5，8　　（D）8，8

解析：找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数（或两个数的平均数）为中位数．根据平均数的性质，可将 5 个数相加进而表示出平均数，即可求出 y 的值． $x=5$，

$9+10+y+15+18+24=16.8\times5$ 解得 $y=8$

答案 C

（5）某几何体的三视图如题（5）图所示，则该几何体的体积为



（A）$\dfrac{560}{3}$

（B）$\dfrac{580}{3}$

（C）200

（D）240

解析：通过三视图复原的几何体的形状，结合三视图的数据求出几何体的体积即可．由三视图可知该几何体为棱柱

$V=\frac{1}{2}(2+8)\times4\times10=200$

答案 C

（6）若 $a<b<c$，则函数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 两个零点分别位于区间

（A）(a,b) 和 (b,c) 内　　（B）$(-\infty,a)$ 和 (a,b) 内

（C）(b,c) 和 $(c,+\infty)$ 内　　（D）$(-\infty,a)$ 和 $(c,+\infty)$ 内

解析：本题考查零点存在性定理：如果函数 $y=f(x)$ 在区间[a，b]上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)f(b)<0$ 那么，函数 $y=f(x)$ 在区间[a，b]内有零点。

$f(a)=(a-b)(a-c)>0$，$f(b)=(b-c)(b-a)<0$， $f(c)=(c-a)(c-b)>0$则 $f(a)f(b)<0$，$f(c)f(b)<0$ 故两个零点分别位于区间 (a,b) 和 (b,c) 内；

答案 A

（7）已知圆 C_1：$(x-2)^2+(y-3)^2=1$，圆 C_2：$(x-3)^2+(y-4)^2=9$，M、N 分别是圆 C_1、C_2 上的动点，P 为 x 轴上的动点，则 $|PM|+|PN|$ 的最小值为

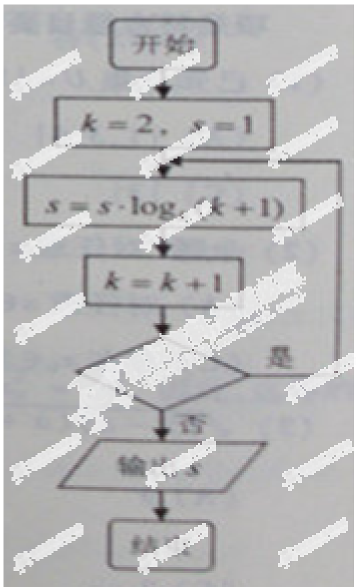
（A）$5\sqrt{2}-4$　　（B）$\sqrt{17}-1$　　（C）$6-2\sqrt{2}$　　（D）$\sqrt{17}$

解析：本题结合图形的性质，考查轴对称--最短路线问题．其中求出$|C_1'C_2|$是解题的关键．C_1关于x轴对称的点为$C_1'(2,-3)$，$|PC_1|+|PC_2|$的最小值为$|C_1'C_2|=\sqrt{(2-3)^2+(-3-4)^2}=5\sqrt{2}$，故$|PM|+|PN|$的最小值为$|PC_1|+|PC_2|-1-3=5\sqrt{2}-4$

答案 A

（8）执行如题（8）图所示的程序框图，如果输出$S=3$，那么判断框内应填入的条件是

（A）$k\le 6$　　（B）$k\le 7$　　（C）$k\le 8$　　（D）$k\le 9$



题（8）图

解析：本题考查循环结构的应用，是基础题．解题时要认真审题，仔细解答．将对数性质与程序框图相结合

$S=1\times\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\log_5 6\times\log_6 7\times\log_7(7+1)=3$故$k=8$时，跳出循环

答案 B

（9）$4\cos 50^0-\tan 40^0=$

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）$2\sqrt{2}-1$

解析：本题考查三角函数的化简求值，解题时要认真审题，仔细求解，注意三角函数恒等变换的合理运用．

$$4\cos 50^0-\tan 40^0=4\cos 50^0-\frac{\sin 40^0}{\cos 40^0}=\frac{4\cos 50^0\cos 40^0-\sin 40^0}{\cos 40^0}$$

$$=\frac{4\cos 50^0\sin 50^0-\sin 40^0}{\cos 40^0}=\frac{2\sin 100^0-\sin 40^0}{\cos 40^0}=\frac{2\sin 80^0-\sin 40^0}{\cos 40^0}$$

$$=\frac{2\sin(120^0-40^0)-\sin 40^0}{\cos 40^0}=\frac{2(\sin 120^0\cos 40^0-\cos 120^0\sin 40^0)-\sin 40^0}{\cos 40^0}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cos 40^0+\sin 40^0-\sin 40^0}{\cos 40^0}=\sqrt{3}$$

答案 C

（10）在平面上，$\overrightarrow{AB_1} \perp \overrightarrow{AB_2}$，$|\overrightarrow{OB_1}| = |\overrightarrow{OB_2}| = 1$，$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB_2}$．若 $|\overrightarrow{OP}| < \frac{1}{2}$，则 $|\overrightarrow{OA}|$ 的取值范围是

（A）$(0,\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　（B）$(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}]$　　（C）$(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}]$　　（D）$(\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2}]$

解析：当 $\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\overrightarrow{OB_2}$ 夹角为 90^0 时，$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(B_1B_2)^2 - OP^2}$，因为 $|\overrightarrow{OP}| < \frac{1}{2}$，$|\overrightarrow{OA}| \le \sqrt{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$，

$|\overrightarrow{OA}| > \sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

答案 D

二．填空题：本大题共 6 小题，考生作答 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填写在答题卡相应位置上．

（11）已知复数 $z = \frac{5i}{1+2i}$（i 是虚数单位），则 $|z| =$____________．

解析：本题考查复数的求模，解题的关键是应用公式 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$．

由 $z = \frac{5i}{1+2i}$ 得 $|z| = |\frac{5i}{1+2i}| = \frac{|5i|}{|1+2i|} = \frac{5}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}$

答案 $\sqrt{5}$

（12）已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1 = 1$，公差 $d \neq 0$，S_n 为其前 n 项和，若 a_1、a_2、a_5 成等比数列，则 $S_8 =$____________．

解析：本题以等差数列、等比数列为载体，综合考查等差数列与等比数列，属于基础题．由 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1 = 1$ 得 $a_2 = 1+d$，$a_5 = 1+4d$，又 a_1、a_2、a_5 成等比数列

所以 $a_2^2 = a_1 \cdot a_5$ 即 $(1+d)^2 = 1\cdot(1+4d)$ 解得 $d = 2$，$d = 0$（舍去）$S_8 = 1\times 8 + \frac{8\times 7}{2}\times 2 = 64$

答案 64

（13）从 3 名骨科、4 名脑外科和 5 名内科医生中选派 5 人组成一个抗震救灾医疗小组，则骨科、脑外科和内科医生都至少有 1 人的选派方法种数是____________（用数字作答）．

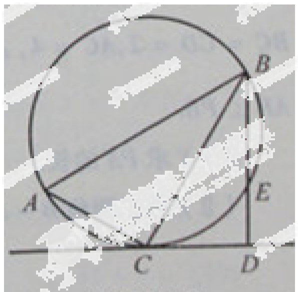
解析：本题考查组合知识，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题．只选一科有 1 种；只选两科 $C_7^5+(C_8^5-1)+(C_9^5-1)$；故骨科、脑外科和内科医生都至少有 1 人的选派方法种数是

$C_{12}^5-(C_7^5+C_8^5+C_9^5-2+1)=590$

答案 590

考生注意：(14)、(15)、(16) 三题为选做题，请从中任选两题作答，若三题全做，则按前两题给分．

（14）如题（14）图，在△ABC 中，$\angle C=90^0$，$\angle A=60^0$，$AB=20$，过 C 作△ABC 的外接圆的切线 CD，$BD\perp CD$，BD 与外接圆交于点 E，则 DE 的长为___________．



题(14)图

解析：由 $\angle C=90^0$，$\angle A=60^0$，$AB=20$，得 $BC=10\sqrt{3}$，由弦切角定理得 $\angle BCD=60^0$，由 $BD\perp CD$ 得 $BD=15, CD=5\sqrt{3}$ 由切割线定理得 $CD^2=BD\times DE$ 即 $(5\sqrt{3})^2=15\times DE$ 所以 $DE=5$

答案:5

（15）在直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．若极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$ 的直线与曲线 $\begin{cases}x=t^2\\y=t^3\end{cases}$（$t$ 为参数）相交于 A、B 两点，则 $|AB|=$___________．

解析：由 $\rho\cos\theta=4$ 得 $x=4$ 由 $\begin{cases}x=t^2\\y=t^3\end{cases}$ 得 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 所以 $|AB|=2\times4^{\frac{3}{2}}=16$

答案:16

（16）若关于实数 x 的不等式 $|x-5|+|x+3|<a$ 无解，则实数 a 的取值范围是___________．

解析：$|x-5|+|x+3|\geq|x-5-x-3|=8$，关于实数 x 的不等式 $|x-5|+|x+3|<a$ 无解，所以 $a\leq8$

答案:$(-\infty,8]$

三．解答题：本大题共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（17）（本小题满分 13 分，（Ⅰ）小问 6 分，（Ⅱ）小问 7 分）

设 $f(x)=a(x-5)^2+6\ln x$，其中 $a\in R$，曲线 $y=f(x)$ 在点（1，$f(1)$）处的切线与 y 轴相较于点（0, 6）．（Ⅰ）确定 a 的值；（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间与极值．

解：（Ⅰ）因 $f(x)=a(x-5)^2+6\ln x$，故 $f'(x)=2a(x-5)+\frac{6}{x}$，令 $x=1$，得 $f(1)=16a$，

$f'(1)=-8a+6$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点（1，$f(1)$）处的切线方程为 $y-16a=(-8a+6)(x-1)$，

由点（0,6）在切线上可得 $6-16a=8a-6$，故 $a=\frac{1}{2}$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)=\frac{1}{2}(x-5)^2+6\ln x(x>0)$，$f'(x)=x-5+\frac{6}{x}=\frac{(x-2)(x-3)}{x}$

令 $f'(x)=0$ 解得 $x_1=2,x_2=3$。

当 $0<x<2$ 或 $x>3$ 时 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,2)$，$(3,+\infty)$ 上为增函数，

当 $2<x<3$ 时 $f'(x)<0$ 故 $f(x)$ 在 $(2,3)$ 上为减函数

由此可知 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值 $f(2)=\frac{9}{2}+6\ln 2$，在 $x=3$ 处取得极小值 $f(3)=2+6\ln 3$

（18）（本小题满分 13 分，（Ⅰ）小问 5 分，（Ⅱ）小问 8 分）

某商场举行的“三色球”购物摸奖活动规定：在一次摸奖中，摸奖者先从装有 3 个红球与 4 个白球的袋中任意摸出 3 个球，再从装有 1 个篮球与 2 个白球的袋中任意摸出 1 个球，根据摸出 4 个球中红球与篮球的个数，设一、二、三等奖如下：

奖级	摸出红、蓝球个数	获奖金额
一等奖	3 红 1 蓝	200 元
二等奖	3 红 0 蓝	50 元
三等奖	2 红 1 蓝	10 元

其余情况无奖且每次摸奖最多只能获得一个奖级．（Ⅰ）求一次摸球恰好摸到 1 个红球的概率；

（Ⅱ）求摸奖者在一次摸奖中获奖金额 X 的分布列与期望 $E(X)$．

解析：设 A_i 表示摸到 i 个红球，B_j 表示摸到 j 个蓝球，则 $A_i(i=0,1,2,3)$ 与 $B_j\ (j=0,1)$ 独立

（Ⅰ）恰好摸到 1 个红球的概率为 $p(A_1)=\frac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35}$

（Ⅱ）X 的所有可能值为：0，10，50，200 且

$$P(X=200)=P(A_3B_1)=P(A_3)P(B_1)=\frac{C_3^3}{C_7^3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{105}$$

$$P(X=50)=P(A_3B_0)=P(A_3)P(B_0)=\frac{C_3^3}{C_7^3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{105}$$

$$P(X=10)=P(A_2B_1)=P(A_2)P(B_1)=\frac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{12}{105}=\frac{4}{35}$$

$$P(X=1)=1-\frac{1}{105}-\frac{2}{105}-\frac{12}{105}=\frac{6}{7}$$

综上知 X 的分布列为

X	0	10	50	200
p	$\frac{6}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{105}$	$\frac{1}{105}$

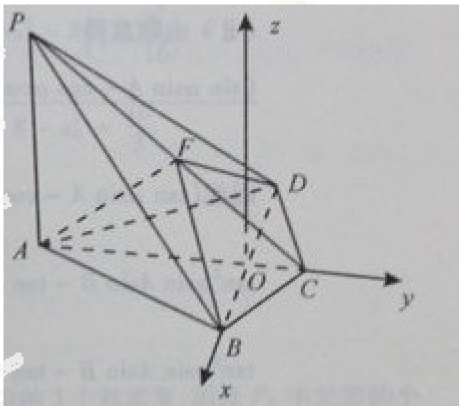
从而有 $E(X)=0\times\frac{6}{7}+10\times\frac{4}{35}+50\times\frac{2}{105}+200\times\frac{1}{105}=4$（元）

（19）（本小题满分 13 分，（Ⅰ）小问 5 分，（Ⅱ）小问 8 分）

如题（19）图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$BC=CD=2$，$AC=4$，$\angle ACB=\angle ACD=\frac{\pi}{3}$，$F$ 为 PC 的中点，$AF\perp PB$.（Ⅰ）求 PA 的长;（Ⅱ）求二面角 $B-AF-D$ 的余弦值.

解析：考查了空间想象能力和观察问题的能力；

（Ⅰ）如答（19）图，连接 BD 交 AC 于 O，因为 $BC=CD$ 即 $\triangle BCD$ 为等腰三角形，又 AC 平分



答(19) 图

$\angle BCD$ 故 $AC\perp BD$，以点 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $OC=CD\cos\frac{\pi}{3}=1$，而 $AC=4$ 得 $AO=AC-OC=3$ 又 $OD=CD\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

故 $A(0,-3,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$

因 $PA\perp$底面 $ABCD$，可设 $P(0,-3,z)$，由 F 为 PC 的中点

$F(0,-1,\frac{z}{2})$，又 $\overrightarrow{AF}=(0,2,\frac{z}{2})$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},3,-z)$，因 $AF\perp PB$ 故 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 即 $6-\frac{z^2}{2}=0$，$z=2\sqrt{3}$ 所以 $|\overrightarrow{PA}|=2\sqrt{3}$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{3},3,0)$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},3,0)$，$\overrightarrow{AF}=(0,2,\sqrt{3})$，

设平面 FAD 法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，平面 FAB 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$。由 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ 得 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_1+3y_1=0\\ 2y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$ 因此可取 $\overrightarrow{n_1}=(3,\sqrt{3},-2)$，由 $\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AF}=0$ 得

$$\begin{cases}\sqrt{3}x_2+3y_2=0\\ 2y_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$$

故可取 $\overrightarrow{n_2}=(3,-\sqrt{3},2)$，从而法向量 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 的夹角的余弦值为 $\therefore\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{1}{8}$

故二面角 $B-AF-D$ 的正弦值 $\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

（20）（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 4 分，（Ⅱ）小问 8 分）

在△ ABC 中，内角 A、B、C 的对边分别是 a、b、c，且 $a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$.

（Ⅰ）求 C；（Ⅱ）设 $\cos A\cos B=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$，$\dfrac{\cos(\alpha+A)\cos(\alpha+B)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$，求 $\tan\alpha$ 的值.

解析：体现了数学转化与化归思想

（Ⅰ）因为 $a^2+b^2+\sqrt{2}ab=c^2$

由余弦定理有 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{-\sqrt{2}ab}{2ab}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$，故 $C=\dfrac{3\pi}{4}$

（Ⅱ）由题意得 $\dfrac{(\cos\alpha\cos A-\sin\alpha\sin A)(\cos\alpha\cos B-\sin\alpha\sin B)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

因此 $(\tan\alpha\sin A-\cos A)(\tan\alpha\sin B-\cos B)=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

$$\tan^2\alpha\sin A\sin B-\tan\alpha(\sin A\cos B+\cos A\sin B)+\cos A\cos B=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\tan^2\alpha\sin A\sin B-\tan\alpha\sin(A+B)+\cos A\cos B=\frac{\sqrt{2}}{5}\ ①$$

因为 $C=\dfrac{3\pi}{4}$，$A+B=\dfrac{\pi}{4}$ 所以 $\sin(A+B)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 因为 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

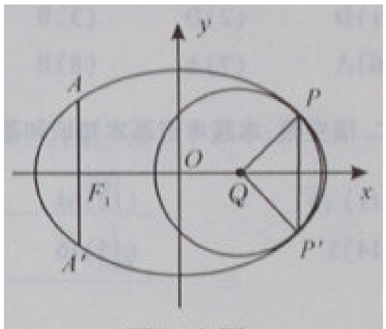
即 $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}-\sin A\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 解得 $\sin A\sin B=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

由①得 $\tan^2\alpha-5\tan\alpha+4=0$ 解得 $\tan\alpha=4$，$\tan\alpha=1$

(21)（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 4 分，（Ⅱ）小问 8 分）

如题（21）图，椭圆的中心为原点O，长轴在x轴上，离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，过左焦点F_1作x轴的垂线交椭圆于A、A'两点，$|AA'|=4$．（Ⅰ）求该椭圆的标准方程；

（Ⅱ）取垂直于x轴的直线与椭圆相较于不同的两点P、P'，过P、P'作圆心为Q的圆，使椭圆上的其余点均在圆Q外．若$PQ\perp P'Q$，求圆Q的标准方程．



题(21) 图

解析：（Ⅰ）由题意知点$A(-c,2)$在椭圆上，则$\frac{(-c)^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}=1$从而$e^2+\frac{4}{b^2}=1$，由$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$得

$b^2=\frac{4}{1-e^2}=8$，从而$a^2=\frac{b^2}{1-e^2}=16$，故该椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

（Ⅱ）由椭圆的对称性，可设$Q(x_0,0)$，又设$M(x,y)$是椭圆任意一点，

则$|MQ|^2=(x-x_0)^2+y^2=x^2-2xx_0+x_0^2+y^2=x^2-2xx_0+x_0^2+8(1-\frac{x^2}{16})$

$=\frac{1}{2}(x-2x_0)^2-x_0^2+8(x\in[-4,4])$

设$P(x_1,y_1)$，由题意，P是椭圆上到Q的距离最小的点，因此，上式当$x=x_1$时取得最小值，又因$x_1\in(-4,4)$，所以上式当$x=2x_0$时 取得最小值，从而$x_1=2x_0$且$|QP|^2=8-x_0^2$

因为$PQ\perp P'Q$且$P'(x_1,-y_1)$所以$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{P'Q}=(x_1-x_0,y_1)\cdot(x_1-x_0,-y_1)=0$

即$(x_1-x_0)^2-y_1^2=0$由椭圆方程及$x_1=2x_0$得$\frac{1}{4}x_1^2-8(1-\frac{x_1^2}{16})=0$

解得$x_1=\pm\frac{4\sqrt{6}}{3},x_0=\frac{x_1}{2}=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$从而$|QP|^2=8-x_0^2=\frac{16}{3}$

故这样的圆有两个，其标准方程分别为$(x+\frac{2\sqrt{6}}{3})^2+y^2=\frac{16}{3}$，$(x-\frac{2\sqrt{6}}{3})^2+y^2=\frac{16}{3}$

(22)（本小题满分 12 分，（Ⅰ）小问 4 分，（Ⅱ）小问 8 分）

对正整数n，记$I_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$，$P_n=\{\frac{m}{\sqrt{k}}\Big|m\in I_n，k\in I_n\}$．（Ⅰ）求集合$P_7$中元素的个数；

（Ⅱ）若 P_n 的子集 A 中任意两个元素之和不是整数的平方，则称 A 为“稀疏集”．求 n 的最大值，使 P_n 能分成两个不相交的稀疏集的并．

解析：新颖别致有创意，与往年命题风格完全不同，既考查了分类讨论、反证法、构造法等多种数学思想，又是一道以能力立意的好题，有较大的开放度和灵活性。

（Ⅰ）当 $k=4$ 时，$\{\frac{m}{\sqrt{k}}\big|m\in I_7\}$ 中有 3 个数与 I_7 中的 3 个数重复，因此 P_7 中元素的个数为 $7\times 7-3=46$

（Ⅱ）先证：$n\geq 15$ 时，P_n 不能分成两个不相交的稀疏集的并。若不然，设 A,B 为不相交的稀疏集，使 $A\cup B=P_n\supseteq I_n$，不妨设 $1\in A$，则因 $1+3=2^2$，故 $3\notin A$ 即 $3\in B$。同理 $6\in A$，$10\in B$ 又推得 $15\in A$ 但 $1+15=2^4$，这与 A 为稀疏集矛盾

再证 P_{14} 符合要求，当 $k=1$ 时，$\{\frac{m}{\sqrt{k}}\big|m\in I_{14}\}=I_{14}$ 可分成两个不相交的稀疏集之并，事实上，只要取 $A_1=\{1,2,4,6,9,11,13\},B_1=\{3,5,7,8,10,12,14\}$ 则 A_1,B_1 为稀疏集，且 $A_1\cup B_1=I_{14}$

当 $k=4$ 时，集 $\{\frac{m}{\sqrt{k}}\big|m\in I_{14}\}$ 中除整数外剩下的数组成集 $\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots\frac{13}{2}\}$，可分解为下面两稀疏集的并：$A_2=\{\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{9}{2},\frac{11}{2}\},B_2=\{\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{13}{2}\}$

当 $k=9$ 时，集 $\{\frac{m}{\sqrt{k}}\big|m\in I_{14}\}$ 中除正整数外剩下的数组成集 $\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\cdots,\frac{13}{3},\frac{14}{3}\}$，可分解为下面两稀疏集的并：$A_3=\{\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3},\frac{13}{3}\},B_3=\{\frac{2}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3},\frac{11}{3},\frac{14}{3}\}$

最后，集 $C=\{\frac{m}{\sqrt{k}}\big|m\in I_{14},k\in I_{14},$ 且 $k\neq 1,4,9\}$ 中的数字母均为无理数，它与 P_{14} 中的任何其他树之和都不是整数，因此，令 $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup C$，$B=B_1\cup B_2\cup B_3$ 则 A 和 B 是不相交的稀疏集，且 $A\cup B=P_{14}$ 综上，所 n 求的最大值为 14

注：对的分拆方法不是唯一的