

$=1+rT$.有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$, $T=6$.据此,在新冠肺炎疫情初始阶段,累计感染病例数增加1倍需要的时间约为($\ln 2 \approx 0.69$) ()

- A. 1.2天
B. 1.8天
C. 2.5天
D. 3.5天

7.已知 P 是边长为2的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点,则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 ()

- A. $(-2, 6)$
B. $(-6, 2)$
C. $(-2, 4)$
D. $(-4, 6)$

8.若定义在 R 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减,且 $f(2)=0$,则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$
B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$
C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$
D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,有选错的得0分,部分选对的得3分.

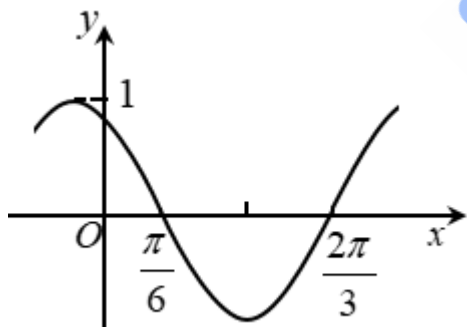
9.已知曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$. ()

- A. 若 $m > n > 0$,则 C 是椭圆,其焦点在 y 轴上
B. 若 $m = n > 0$,则 C 是圆,其半径为 \sqrt{n}

C. 若 $mn < 0$,则 C 是双曲线,其渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{\frac{m}{n}}x$

D. 若 $m = 0, n > 0$,则 C 是两条直线

10.下图是函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图像,则 $\sin(\omega x + \varphi) =$ ()



- A. $\sin(x + \frac{\pi}{3})$
B. $\sin(\frac{\pi}{3} - 2x)$
C. $\cos(2x + \frac{\pi}{6})$
D. $\cos(\frac{5\pi}{6} - 2x)$

11.已知 $a > 0, b > 0$,且 $a + b = 1$,则 ()

- A. $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$
B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$
C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$
D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

12. 信息熵是信息论中的一个重要概念. 设随机变量 X 所有可能的取值为 $1, 2, \dots, n$, 且

$$P(X=i) = p_i > 0 (i=1, 2, \dots, n), \sum_{i=1}^n p_i = 1, \text{ 定义 } X \text{ 的信息熵 } H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i. \quad ()$$

A. 若 $n=1$, 则 $H(X)=0$

B. 若 $n=2$, 则 $H(X)$ 随着 p_1 的增大而增大

C. 若 $p_i = \frac{1}{n} (i=1, 2, \dots, n)$, 则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大

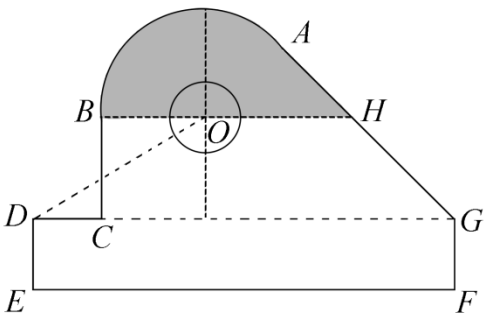
D. 若 $n=2m$, 随机变量 Y 所有可能的取值为 $1, 2, \dots, m$, 且 $P(Y=j) = p_j + p_{2m+1-j} (j=1, 2, \dots, m)$, 则 $H(X) \leq H(Y)$

三、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线过抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点, 且与 C 交于 A, B 两点, 则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 某中学开展劳动实习, 学生加工制作零件, 零件的截面如图所示. O 为圆孔及轮廓圆弧 AB 所在圆的圆心, A 是圆弧 AB 与直线 AG 的切点, B 是圆弧 AB 与直线 BC 的切点, 四边形 $DEFG$ 为矩形, $BC \perp DG$, 垂足为 C , $\tan \angle ODC = \frac{3}{5}$, $BH \parallel DG$, $EF=12 \text{ cm}$, $DE=2 \text{ cm}$, A 到直线 DE 和 EF 的距离均为 7 cm , 圆孔半径为 1 cm , 则图中阴影部分的面积为 $\underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$.



16. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2 , $\angle BAD=60^\circ$. 以 D_1 为球心, $\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 在 ① $ac = \sqrt{3}$, ② $c \sin A = 3$, ③ $c = \sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 若问题中的三角形存在, 求 c 的值; 若问题中的三角形不存在, 说明理由.

问题: 是否存在 $\triangle ABC$, 它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$, $C = \frac{\pi}{6}$, $\underline{\hspace{2cm}}$?

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. 已知公比大于 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 = 20, a_3 = 8$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求 $a_1a_2 - a_2a_3 + \dots + (-1)^{n-1} a_n a_{n+1}$.

19.为加强环境保护，治理空气污染，环境监测部门对某市空气质量进行调研，随机抽查了100天空气中的PM2.5和SO₂浓度（单位：μg/m³），得下表：

SO ₂ PM2.5	[0,50]	(50,150]	(150,475]
[0,35]	32	18	4
(35,75]	6	8	12
(75,115]	3	7	10

(1) 估计事件“该市一天空气中PM2.5浓度不超过75，且SO₂浓度不超过150”的概率；

(2) 根据所给数据，完成下面的2×2列联表：

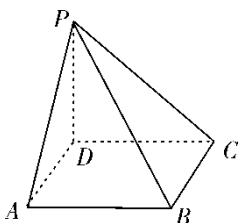
SO ₂ PM2.5	[0,150]	(150,475]
[0,75]		
(75,115]		

(3) 根据(2)中的列联表，判断是否有99%的把握认为该市一天空气中PM2.5浓度与SO₂浓度有关？

附：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

20.如图，四棱锥P-ABCD的底面为正方形，PD⊥底面ABCD. 设平面PAD与平面PBC的交线为l.



(1) 证明: $l \perp$ 平面 PDC ;

(2) 已知 $PD=AD=1$, Q 为 l 上的点, 求 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 3)$, 点 A 为其左顶点, 且 AM 的斜率为 $\frac{1}{2}$,

(1) 求 C 的方程;

(2) 点 N 为椭圆上任意一点, 求 $\triangle AMN$ 的面积的最大值.

22. 已知函数 $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$.

(1) 当 $a = e$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积;

(2) 若 $f(x) \geq 1$, 求 a 的取值范围.