

2004 年山西高考文科数学真题及答案

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。共 150 分。考试时间 120 分钟。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 A、B 相互独立，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么

n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

其中 R 表示球的半径，

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

其中 R 表示球的半径

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

1. 设集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$, 则 $A \cap (C_U B) =$ ()

- A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3\}$ D. $\{1, 3\}$

2. 已知函数 $f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$, 若 $f(a) = \frac{1}{2}$, 则 $f(-a) =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

3. 已知 \vec{a}, \vec{b} 均为单位向量，它们的夹角为 60° ，那么 $|\vec{a} + 3\vec{b}| =$ ()

- A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{13}$ D. 4

4. 函数 $y = \sqrt{x-1} + 1 (x \geq 1)$ 的反函数是 ()

- A. $y = x^2 - 2x + 2 (x < 1)$ B. $y = x^2 - 2x + 2 (x \geq 1)$
C. $y = x^2 - 2x (x < 1)$ D. $y = x^2 - 2x (x \geq 1)$

5. $(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}})^7$ 的展开式中常数项是 ()

- A. 14 B. -14 C. 42 D. -42

6. 设 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 若 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\sqrt{2} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$ ()

- A. $\frac{7}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{7}{2}$ D. 4

7. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的两个焦点为 F_1, F_2 , 过 F_1 作垂直于 x 轴的直线与椭圆相交，一个交点

为 P, 则 $|\overrightarrow{PF_2}| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{7}{2}$ D. 4

8. 设抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线与 x 轴交于点 Q, 若过点 Q 的直线 l 与抛物线有公共点, 则直线 l 的斜率的取值范围是 ()

- A. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ B. $[-2, 2]$ C. $[-1, 1]$ D. $[-4, 4]$

9. 为了得到函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图象, 可以将函数 $y = \cos 2x$ 的图象 ()

- A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 D. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

10. 已知正四面体 ABCD 的表面积为 S, 其四个面的中心分别为 E、F、G、H, 设四面体 EFGH 的表面积为 T, 则 $\frac{T}{S}$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{3}$

11. 从 1, 2, ..., 9 这九个数中, 随机抽取 3 个不同的数, 则这 3 个数的和为偶数的概率是 ()

- A. $\frac{5}{9}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{11}{21}$ D. $\frac{10}{21}$

12. 已知 $a^2 + b^2 = 1, b^2 + c^2 = 2, c^2 + a^2 = 2$, 则 $ab + bc + ca$ 的最小值为 ()

- A. $\sqrt{3} - \frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ C. $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ D. $\frac{1}{2} + \sqrt{3}$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. 不等式 $x + x^3 \geq 0$ 的解集是_____.

14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 3, a_{10} = 384$, 则该数列的通项 $a_n =$ _____.

15. 由动点 P 向圆 $x^2 + y^2 = 1$ 引两条切线 PA、PB, 切点分别为 A、B, $\angle APB = 60^\circ$, 则动点 P 的轨迹方程为_____.

16. 已知 a 、 b 为不垂直的异面直线, α 是一个平面, 则 a 、 b 在 α 上的射影有可能是_____.

- ①两条平行直线 ②两条互相垂直的直线
③同一条直线 ④一条直线及其外一点

在一面结论中, 正确结论的编号是_____ (写出所有正确结论的编号).

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n . 已知 $a_{10} = 30, a_{20} = 50$.

(I) 求通项 a_n ;

(II) 若 $S_n = 242$, 求 n .

18. (本小题满分 12 分)

求函数 $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x}$ 的最小正周期、最大值和最小值.

19. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = ax^3 + 3x^2 - x + 1$ 在 \mathbb{R} 上是减函数, 求 a 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

从 10 位同学 (其中 6 女, 4 男) 中随机选出 3 位参加测验. 每位女同学能通过测验的概率均为 $\frac{4}{5}$, 每位男同学能通过测验的概率均为 $\frac{3}{5}$. 试求:

(I) 选出的 3 位同学中, 至少有一位男同学的概率;

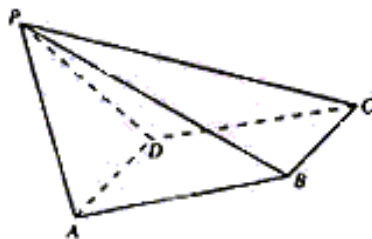
(II) 10 位同学中的女同学甲和男同学乙同时被选中且通过测验的概率.

21. (本小题满分 12 分)

如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$, $PB \perp AD$, 侧面 PAD 为边长等于 2 的正三角形, 底面 $ABCD$ 为菱形, 侧面 PAD 与底面 $ABCD$ 所成的二面角为 120° .

(I) 求点 P 到平面 $ABCD$ 的距离;

(II) 求面 APB 与面 CPB 所成二面角的大小.



22. (本小题满分 14 分)

设双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 与直线 $l: x + y = 1$ 相交于两个不同的点 A、B.

(I) 求双曲线 C 的离心率 e 的取值范围;

(II) 设直线 l 与 y 轴的交点为 P, 且 $\overrightarrow{PA} = \frac{5}{12} \overrightarrow{PB}$. 求 a 的值.

文科数学参考答案

一、选择题

DCBABCBCACB

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. $\{x | x \geq 0\}$ 14. $3 \cdot 2^{n-3}$ 15. $x^2 + y^2 = 4$ 16. ①②④

三、解答题

17. 本小题主要考查等差数列的通项公式、求和公式, 考查运算能力. 满分 12 分.

解: (I) 由 $a_n = a_1 + (n-1)d, a_{10} = 30, a_{20} = 50$, 得方程组

$$\begin{cases} a_1 + 9d = 30, \\ a_1 + 19d = 50. \end{cases} \quad \dots\dots 4 \text{ 分} \quad \text{解得 } a_1 = 12, d = 2. \quad \text{所以 } a_n = 2n + 10. \dots\dots 7 \text{ 分}$$

(II) 由 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d, S_n = 242$ 得方程

$$12n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = 242. \quad \dots\dots 10 \text{ 分} \quad \text{解得 } n = 11 \text{ 或 } n = -22 (\text{舍去}). \dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 本小题主要考查三角函数基本公式和简单的变形, 以及三角函数的有关性质. 满分 12 分.

解: $f(x) = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{2 - 2 \sin x \cos x}$

$$= \frac{1 - \sin^2 x \cos^2 x}{2(1 - \sin x \cos x)} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \sin x \cos x)$$

$$= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2}.$$

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π ，最大值是 $\frac{3}{4}$ ，最小值是 $\frac{1}{4}$ 。……12 分

19. 本小题主要考查导数的概念和计算，应用导数研究函数单调性的基本方法，考查综合运用数学知识解决问题的能力. 满分 12 分.

解：函数 $f(x)$ 的导数： $f'(x) = 3ax^2 + 6x - 1$ 。……3 分

(I) 当 $f'(x) < 0$ ($x \in R$) 时， $f(x)$ 是减函数.

$$3ax^2 + 6x - 1 < 0(x \in R) \Leftrightarrow a < 0 \text{ 且 } \Delta = 36 + 12a < 0 \Leftrightarrow a < -3.$$

所以，当 $a < -3$ 时，由 $f'(x) < 0$ ，知 $f(x)(x \in R)$ 是减函数；……9 分

(II) 当 $a = -3$ 时， $f(x) = -3x^3 + 3x^2 - x + 1 = -3(x - \frac{1}{3})^3 + \frac{8}{9}$ ，

由函数 $y = x^3$ 在 R 上的单调性，可知

当 $a = -3$ 时， $f(x)(x \in R)$ 是减函数；

(III) 当 $a > -3$ 时，在 R 上存在一个区间，其上有 $f'(x) > 0$ ，

所以，当 $a > -3$ 时，函数 $f(x)(x \in R)$ 不是减函数.

综上，所求 a 的取值范围是 $(-\infty, -3]$ 。……12 分

20. 本小题主要考查组合，概率等基本概念，独立事件和互斥事件的概率以及运用概率知识解决实际问题的能力，满分 12 分.

解：(I) 随机选出的 3 位同学中，至少有一位男同学的概率为

$$1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{5}{6}; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 甲、乙被选中且能通过测验的概率为

$$\frac{C_8^1}{C_{10}^3} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{125}; \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 本小题主要考查棱锥，二面角和线面关系等基本知识，同时考查空间想象能力和推理、运算能力. 满分 12 分.

(I) 解：如图，作 $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ，垂足为点 O . 连结 OB 、 OA 、 OD 、 OB 与 AD 交于点 E ，连结 PE .

$\because AD \perp PB, \therefore AD \perp OB$,

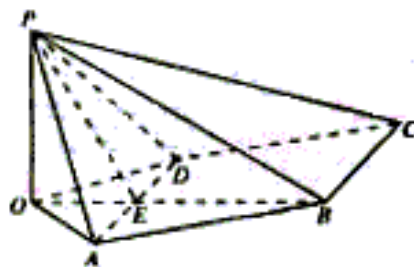
$\because PA = PD, \therefore OA = OD$,

于是 OB 平分 AD ，点 E 为 AD 的中点，所以 $PE \perp AD$.

由此知 $\angle PEB$ 为面 PAD 与面 $ABCD$ 所成二面角的平面角，……4 分

$\therefore \angle PEB = 120^\circ, \angle PEO = 60^\circ$

由已知可求得 $PE = \sqrt{3}$



$$\therefore PO = PE \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2},$$

即点 P 到平面 ABCD 的距离为 $\frac{3}{2}$6 分

(II) 解法一: 如图建立直角坐标系, 其中 O 为坐标原点, x 轴平行于 DA.

$P(0, 0, \frac{3}{2}), B(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0), PB$ 中点 G 的坐标为 $(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$. 连结 AG.

又知 $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0), C(-2, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0)$. 由此得到:

$$\vec{GA} = (1, -\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}),$$

$$\vec{PB} = (0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}), \vec{BC} = (-2, 0, 0).$$

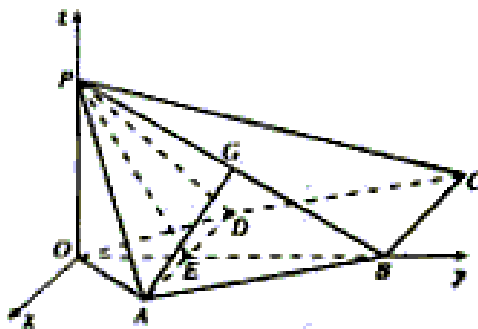
于是有 $\vec{GA} \cdot \vec{PB} = 0, \vec{BC} \cdot \vec{PB} = 0$

所以 $\vec{GA} \perp \vec{PB}, \vec{BC} \perp \vec{PB}$. \vec{GA}, \vec{BC} 的夹角 θ

等于所求二面角的平面角,10 分

$$\text{于是 } \cos \theta = \frac{\vec{GA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{GA}| \cdot |\vec{BC}|} = -\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

所以所求二面角的大小为 $\pi - \arccos \frac{2\sqrt{7}}{7}$12 分



解法二: 如图, 取 PB 的中点 G, PC 的中点 F, 连结 EG、AG、GF, 则 $AG \perp PB, FG \parallel BC,$

$$FG = \frac{1}{2} BC.$$

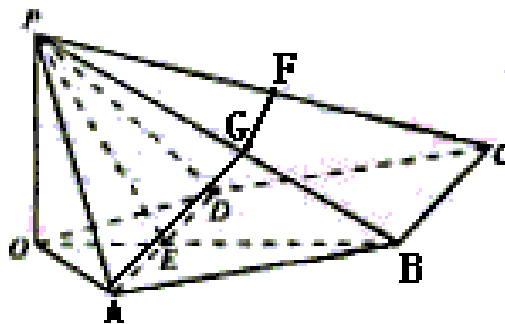
$\because AD \perp PB, \therefore BC \perp PB, FG \perp PB,$

$\therefore \angle AGF$ 是所求二面角的平面角.9 分

$\because AD \perp \text{面 } POB, \therefore AD \perp EG.$

又 $\because PE = BE, \therefore EG \perp PB,$ 且 $\angle PEG = 60^\circ$.

在 $\text{Rt} \triangle PEG$ 中, $EG = PE \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



在 $\text{Rt} \triangle PEG$ 中, $EG = \frac{1}{2} AD = 1$. 于是 $\tan \angle GAE = \frac{EG}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $\angle AGF = \pi - \angle GAE$. 所以所求二面角的大小为 $\pi - \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$12 分

22. (本小题主要考查直线和双曲线的概念和性质, 平面向量的运算等解析几何的基本思想和综合解题能力.)

满分 14 分.

解: (I) 由 C 与 t 相交于两个不同的点, 故知方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

有两个不同的实数解. 消去 y 并整理得 $(1-a^2)x^2 + 2a^2x - 2a^2 = 0$. ①2 分

$$\text{所以} \begin{cases} 1-a^2 \neq 0. \\ 4a^4 + 8a^2(1-a^2) > 0. \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < a < \sqrt{2} \text{ 且 } a \neq 1.$$

双曲线的离心率

$$e = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1}. \quad \because 0 < a < \sqrt{2} \text{ 且 } a \neq 1,$$
$$\therefore e > \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 且 } e \neq \sqrt{2}$$

即离心率 e 的取值范围为 $(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$6 分

(II) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P_1(0, 1)$

$$\because \overrightarrow{PA} = \frac{5}{12} \overrightarrow{PB}, \quad \therefore (x_1, y_1 - 1) = \frac{5}{12} (x_2, y_2 - 1). \quad \text{由此得 } x_1 = \frac{5}{12} x_2. \text{8 分}$$

由于 x_1, x_2 都是方程①的根, 且 $1-a^2 \neq 0$,

$$\text{所以 } \frac{17}{12} x_2 = -\frac{2a^2}{1-a^2}, \quad \frac{5}{12} x_2^2 = -\frac{2a^2}{1-a^2}. \text{ 消去 } x_2, \text{ 得 } -\frac{2a^2}{1-a^2} = \frac{289}{60}$$

由 $a > 0$, 所以 $a = \frac{17}{13}$14 分