

## 2003年黑龙江高考文科数学真题及答案

### 一、选择题（共12小题，每小题5分，满分60分）

1. (5分) 直线  $y=2x$  关于  $x$  轴对称的直线方程为 ( )

- A.  $y=-\frac{1}{2}x$       B.  $y=\frac{1}{2}x$       C.  $y=-2x$       D.  $y=2x$

2. (5分) 已知  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $\cos x = \frac{4}{5}$ , 则  $\tan 2x$  等于 ( )

- A.  $\frac{7}{24}$       B.  $-\frac{7}{24}$       C.  $\frac{24}{7}$       D.  $-\frac{24}{7}$

3. (5分) 抛物线  $y=ax^2$  的准线方程是  $y=2$ , 则  $a$  的值为 ( )

- A.  $\frac{1}{8}$       B.  $-\frac{1}{8}$       C. 8      D. -8

4. (5分) 等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_2 + a_5 = 4$ ,  $a_n = 33$ , 则  $n$  为 ( )

- A. 48      B. 49      C. 50      D. 51

5. (5分) 双曲线虚轴的一个端点为  $M$ , 两个焦点为  $F_1, F_2$ ,  $\angle F_1MF_2 = 120^\circ$ , 则双曲线的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$       B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. (5分) 设函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1 & x \leq 0 \\ x^{\frac{1}{2}} & x > 0 \end{cases}$  若  $f(x_0) > 1$ , 则  $x_0$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-1, 1)$       B.  $(-1, +\infty)$   
C.  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$       D.  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

7. (5分) 已知  $f(x^5) = \lg x$ , 则  $f(2) =$  ( )

- A.  $\lg 2$       B.  $\lg 32$       C.  $\lg \frac{1}{32}$       D.  $\frac{1}{5} \lg 2$

8. (5分) 函数  $y = \sin(x + \phi)$  ( $0 \leq \phi \leq \pi$ ) 是  $R$  上的偶函数, 则  $\phi =$  ( )

- A. 0      B.  $\frac{\pi}{4}$       C.  $\frac{\pi}{2}$       D.  $\pi$

9. (5分) 已知点  $(a, 2)$  ( $a > 0$ ) 到直线  $l: x - y + 3 = 0$  的距离为 1, 则  $a =$  ( )

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $2 - \sqrt{2}$       C.  $\sqrt{2} - 1$       D.  $\sqrt{2} + 1$

10. (5分) 已知圆锥的底面半径为  $R$ , 高为  $3R$ , 它的内接圆柱的底面半径为  $\frac{3}{4}R$ , 该圆柱的全面积为 ( )

- A.  $2\pi R^2$       B.  $\frac{9}{4}\pi R^2$       C.  $\frac{8}{3}\pi R^2$       D.  $\frac{5}{2}\pi R^2$

11. (5分) 已知长方形的四个顶点  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(2, 1)$  和  $D(0, 1)$ , 一质点从  $AB$  的中点  $P_0$  沿与  $AB$  夹角为  $\theta$  的方向射到  $BC$  上的点  $P_1$  后, 依次反射到  $CD$ 、 $DA$  和  $AB$  上的点  $P_2$ 、 $P_3$  和  $P_4$  (入射角等于反射角) 若  $P_4$  与  $P_0$  重合, 则  $\tan\theta =$  ( )

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{2}{5}$       C.  $\frac{1}{2}$       D. 1

12. (5分) 棱长都为  $\sqrt{2}$  的四面体的四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ( )

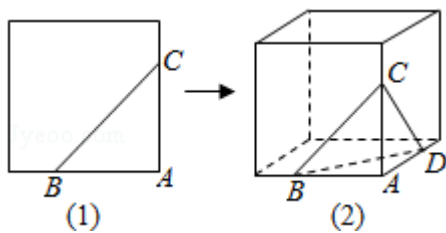
- A.  $3\pi$       B.  $4\pi$       C.  $3\sqrt{3}\pi$       D.  $6\pi$

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 4 分, 满分 16 分)

13. (4分) 不等式  $\sqrt{4x - x^2} < 1$  的解集是\_\_\_\_\_.

14. (4分) 在  $(x - \frac{1}{2x})^9$  的展开式中,  $x^3$  的系数是\_\_\_\_\_ (用数字作答)

15. (4分) 在平面几何里, 有勾股定理 “设  $\triangle ABC$  的两边  $AB, AC$  互相垂直, 则  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”, 拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出正确的结论是: “设三棱锥  $A - BCD$  的三个侧面  $ABC, ACD, ADB$  两两互相垂直, 则\_\_\_\_\_.”



16. (4分) 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻区域不得使用同一颜色. 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有\_\_\_\_\_种. (以数字作答)

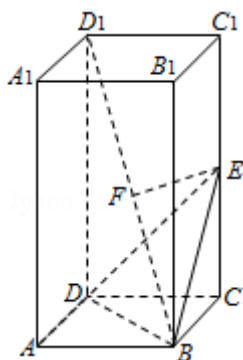


三、解答题（共6小题，满分74分）

17. (12分) 已知正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ .  $AB=1$ ,  $AA_1=2$ , 点  $E$  为  $CC_1$  中点, 点  $F$  为  $BD_1$  中点.

(1) 证明  $EF$  为  $BD_1$  与  $CC_1$  的公垂线;

(2) 求点  $D_1$  到面  $BDE$  的距离.



18. (12分) 已知复数  $z$  的辐角为  $60^\circ$ , 且  $|z-1|$  是  $|z|$  和  $|z-2|$  的等比中项. 求  $|z|$ .

19. (12分) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=1$ ,  $a_n=3^{n-1}+a_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ).

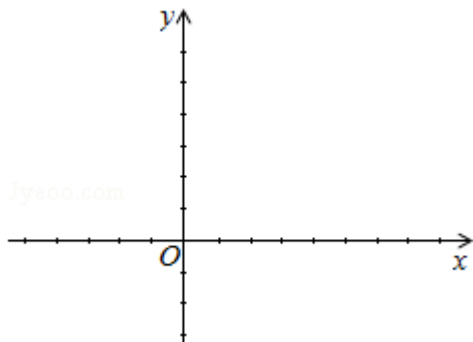
(I) 求  $a_2, a_3$ ;

(II) 证明  $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ .

20. (12分) 已知函数  $f(x) = 2\sin x (\sin x + \cos x)$ .

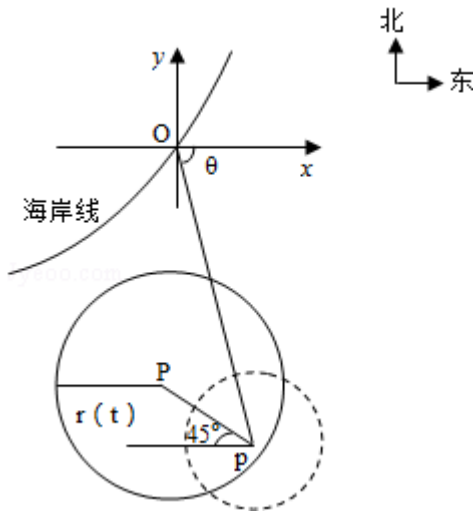
(1) 求函数  $f(x)$  的最小正周期和最大值;

(2) 在给出的直角坐标系中, 画出函数  $y=f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上的图象.



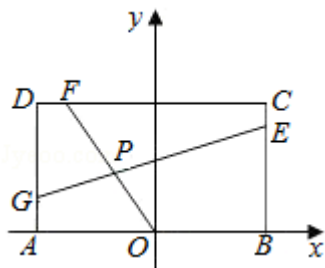
21. (12分) 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市  $O$  (如图)

的东偏南  $\theta$  ( $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ) 方向  $300\text{km}$  的海面  $P$  处, 并以  $20\text{km/h}$  的速度向西偏北  $45^\circ$  方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为  $60\text{km}$ , 并以  $10\text{km/h}$  的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



22. (14分) 已知常数  $a > 0$ , 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=4$ ,  $BC=4a$ ,  $O$  为  $AB$  的中点, 点  $E$ 、 $F$ 、 $G$

分别在  $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  上移动, 且  $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA}$ ,  $P$  为  $GE$  与  $OF$  的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使  $P$  到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.



2003 年全国统一高考数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分）

1. (5 分) 直线  $y=2x$  关于  $x$  轴对称的直线方程为 ( )

- A.  $y=-\frac{1}{2}x$       B.  $y=\frac{1}{2}x$       C.  $y=-2x$       D.  $y=2x$

【解答】解：∵ 直线  $y=f(x)$  关于  $x$  对称的直线方程为  $y=-f(x)$ ,

∴ 直线  $y=2x$  关于  $x$  对称的直线方程为：

$$y=-2x.$$

故选：C.

2. (5 分) 已知  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $\cos x = \frac{4}{5}$ , 则  $\tan 2x$  等于 ( )

- A.  $\frac{7}{24}$       B.  $-\frac{7}{24}$       C.  $\frac{24}{7}$       D.  $-\frac{24}{7}$

【解答】解：∵  $\cos x = \frac{4}{5}$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ ,

$$\therefore \sin x = -\frac{3}{5}, \therefore \tan x = -\frac{3}{4}.$$

$$\therefore \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{-\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}} = -\frac{3}{2} \times \frac{16}{7} = -\frac{24}{7}.$$

故选：D.

3. (5 分) 抛物线  $y=ax^2$  的准线方程是  $y=2$ , 则  $a$  的值为 ( )

- A.  $\frac{1}{8}$       B.  $-\frac{1}{8}$       C. 8      D. -8

【解答】解：抛物线  $y=ax^2$  的标准方程是  $x^2 = \frac{1}{a}y$ ,

$$\text{则其准线方程为 } y = -\frac{1}{4a} = 2,$$

所以  $a = -\frac{1}{8}$ .

故选: B.

4. (5分) 等差数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_2 + a_5 = 4$ ,  $a_n = 33$ , 则  $n$  为 ( )

A. 48

B. 49

C. 50

D. 51

【解答】解: 设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ,

$$\therefore a_1 = \frac{1}{3}, a_2 + a_5 = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{3} + d + \frac{1}{3} + 4d = 4, \text{ 即 } \frac{2}{3} + 5d = 4,$$

$$\text{解得 } d = \frac{2}{3}.$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2}{3}n - \frac{1}{3},$$

$$\text{令 } a_n = 33,$$

$$\text{即 } \frac{2}{3}n - \frac{1}{3} = 33,$$

$$\text{解得 } n = 50.$$

故选: C.

5. (5分) 双曲线虚轴的一个端点为  $M$ , 两个焦点为  $F_1, F_2$ ,  $\angle F_1MF_2 = 120^\circ$ , 则双曲线的离心率为 ( )

A.  $\sqrt{3}$

B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解答】解: 根据双曲线对称性可知  $\angle OMF_2 = 60^\circ$ ,

$$\therefore \tan \angle OMF_2 = \frac{OF_2}{OM} = \frac{c}{b} = \sqrt{3}, \text{ 即 } c = \sqrt{3}b,$$

$$\therefore a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{2}b,$$



当  $\phi = \frac{\pi}{2}$  时,  $y = \sin(x + \phi) = \cos x$ , 为偶函数, 满足条件.

当  $\phi = \pi$  时,  $y = \sin(x + \phi) = -\sin x$ , 为奇函数,

故选: C.

9. (5分) 已知点  $(a, 2)$  ( $a > 0$ ) 到直线  $l: x - y + 3 = 0$  的距离为 1, 则  $a =$  ( )

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $2 - \sqrt{2}$       C.  $\sqrt{2} - 1$       D.  $\sqrt{2} + 1$

$$1 = \frac{|a - 2 + 3|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} = |a + 1|$$

【解答】解: 由点到直线的距离公式得:

$\because a > 0,$

$$\therefore a = \sqrt{2} - 1.$$

故选: C.

10. (5分) 已知圆锥的底面半径为  $R$ , 高为  $3R$ , 它的内接圆柱的底面半径为  $\frac{3}{4}R$ , 该圆柱的全面积为 ( )

- A.  $2\pi R^2$       B.  $\frac{9}{4}\pi R^2$       C.  $\frac{8}{3}\pi R^2$       D.  $\frac{5}{2}\pi R^2$

【解答】解: 设圆锥内接圆柱的高为  $h$ , 则  $\frac{\frac{3R}{4}}{R} = \frac{3R-h}{3R}$ , 解得  $h = \frac{3}{4}R$ ,

$$\text{所以圆柱的全面积为: } s = 2 \times \left(\frac{3}{4}R\right)^2 \pi + \left(\frac{3}{2}R\right) \pi \times \frac{3}{4}R = \frac{9}{4}\pi R^2.$$

故选: B.

11. (5分) 已知长方形的四个顶点  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(2, 1)$  和  $D(0, 1)$ , 一质点从  $AB$  的中点  $P_0$  沿与  $AB$  夹角为  $\theta$  的方向射到  $BC$  上的点  $P_1$  后, 依次反射到  $CD$ 、 $DA$  和  $AB$  上的点  $P_2$ 、 $P_3$  和  $P_4$  (入射角等于反射角) 若  $P_4$  与  $P_0$  重合, 则  $\tan \theta =$  ( )

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{2}{5}$       C.  $\frac{1}{2}$       D. 1

【解答】解: 由于若  $P_4$  与  $P_0$  重合,

故  $P_2$ 、 $P_3$  也都是所在边的中点,

因为  $ABCD$  是长方形,

根据对称性可知  $P_0P_1$  的斜率是  $\frac{1}{2}$ ,

则  $\tan \theta = \frac{1}{2}$ .

故选: C.

12. (5分) 棱长都为  $\sqrt{2}$  的四面体的四个顶点在同一球面上, 则此球的表面积为 ( )

- A.  $3\pi$                       B.  $4\pi$                       C.  $3\sqrt{3}\pi$                       D.  $6\pi$

**【解答】**解: 借助立体几何的两个熟知的结论:

(1) 一个正方体可以内接一个正四面体;

(2) 若正方体的顶点都在一个球面上, 则正方体的体对角线就是球的直径.

则球的半径  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$\therefore$  球的表面积为  $3\pi$ ,

故选: A.

## 二、填空题 (共4小题, 每小题4分, 满分16分)

13. (4分) 不等式  $\sqrt{4x-x^2} < x$  的解集是  $(2, 4]$ .

**【解答】**解:  $\because x > \sqrt{4x-x^2} \geq 0$ ,

$\therefore x > 0$ ,

$\because$  不等式  $\sqrt{4x-x^2} < x$ , 两边平方得,

$4x - x^2 < x^2$ ,

$\therefore 2x^2 - 4x > 0$ ,

解得,  $x > 2$ ,  $x < 0$  (舍去),

$\therefore 4x - x^2 \geq 0$ ,

$\therefore 0 \leq x \leq 4$ ,

$\therefore$  综上得: 不等式的解集为:  $(2, 4]$ ,

故答案为  $(2, 4]$ .

14. (4分) 在  $(x - \frac{1}{2x})^9$  的展开式中,  $x^3$  的系数是  $-\frac{21}{2}$  (用数字作答)

【解答】解：根据题意，对于  $(x - \frac{1}{2x})^9$ ,

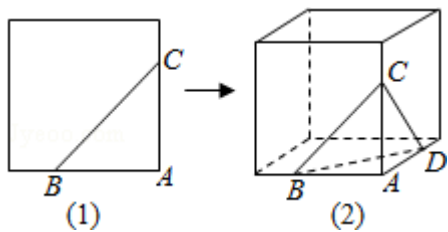
有  $T_{r+1} = C_9^r \cdot x^{9-r} \cdot (-\frac{1}{2x})^r = (-\frac{1}{2})^r \cdot C_9^r \cdot x^{9-2r}$ ,

令  $9 - 2r = 3$ , 可得  $r = 3$ ,

当  $r = 3$  时, 有  $T_4 = -\frac{21}{2}x^3$ ,

故答案  $-\frac{21}{2}$ .

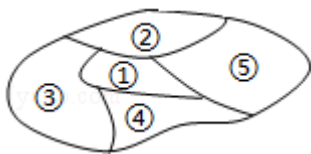
15. (4分) 在平面几何里, 有勾股定理“设  $\triangle ABC$  的两边  $AB, AC$  互相垂直, 则  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ”, 拓展到空间, 类比平面几何的勾股定理, 研究三棱锥的侧面面积与底面面积间的关系, 可以得出正确的结论是: “设三棱锥  $A - BCD$  的三个侧面  $ABC, ACD, ADB$  两两互相垂直, 则  $S_{\triangle ABC}^2 + S_{\triangle ACD}^2 + S_{\triangle ADB}^2 = S_{\triangle BCD}^2$ .”



【解答】解：建立从平面图形到空间图形的类比, 于是作出猜想:  $S_{\triangle ABC}^2 + S_{\triangle ACD}^2 + S_{\triangle ADB}^2 = S_{\triangle BCD}^2$ .

故答案为:  $S_{\triangle ABC}^2 + S_{\triangle ACD}^2 + S_{\triangle ADB}^2 = S_{\triangle BCD}^2$ .

16. (4分) 如图, 一个地区分为 5 个行政区域, 现给地图着色, 要求相邻区域不得使用同一颜色. 现有 4 种颜色可供选择, 则不同的着色方法共有 72 种. (以数字作答)



【解答】解：由题意, 选用 3 种颜色时: 涂色方法  $C_4^3 \cdot A_3^3 = 24$  种

4 色全用时涂色方法:  $C_2^1 \cdot A_4^4 = 48$  种

所以不同的着色方法共有 72 种.

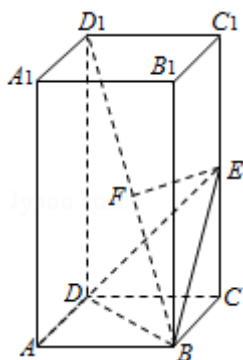
故答案为: 72

### 三、解答题 (共 6 小题, 满分 74 分)

17. (12分) 已知正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ .  $AB=1$ ,  $AA_1=2$ , 点  $E$  为  $CC_1$  中点, 点  $F$  为  $BD_1$  中点.

(1) 证明  $EF$  为  $BD_1$  与  $CC_1$  的公垂线;

(2) 求点  $D_1$  到面  $BDE$  的距离.



**【解答】** 解: (1) 取  $BD$  中点  $M$ .

连接  $MC$ ,  $FM$ .

$\because F$  为  $BD_1$  中点,

$$\therefore FM \parallel D_1D \text{ 且 } FM = \frac{1}{2} D_1D.$$

$$\text{又 } EC = \frac{1}{2} CC_1 \text{ 且 } EC \perp MC,$$

$\therefore$  四边形  $EFMC$  是矩形

$\therefore EF \perp CC_1$ . 又  $FM \perp$  面  $DBD_1$ .

$\therefore EF \perp$  面  $DBD_1$ .

$\because BD_1 \subset$  面  $DBD_1$ .  $\therefore EF \perp BD_1$ .

故  $EF$  为  $BD_1$  与  $CC_1$  的公垂线.

(II) 解: 连接  $ED_1$ , 有  $V_{E-DBD_1} = V_{D_1-DBE}$ .

由 (I) 知  $EF \perp$  面  $DBD_1$ ,

设点  $D_1$  到面  $BDE$  的距离为  $d$ .

$$\text{则 } S_{\triangle DBE} \cdot d = S_{\triangle DBD_1} \cdot EF.$$

$\because AA_1=2$ ,  $AB=1$ .

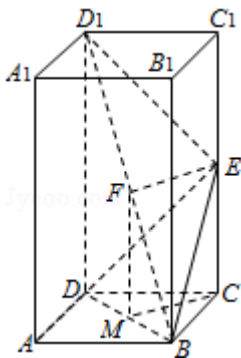
$$\therefore BD = BE = ED = \sqrt{2}, \quad EF = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle D_1BD_1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = \sqrt{2} \quad S_{\triangle DBE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore$

故点  $D_1$  到平面  $DBE$  的距离为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .



18. (12分) 已知复数  $z$  的辐角为  $60^\circ$ , 且  $|z-1|$  是  $|z|$  和  $|z-2|$  的等比中项. 求  $|z|$ .

【解答】解: 设  $z = (r\cos 60^\circ + r\sin 60^\circ i)$ ,

则复数  $z$  的实部为  $\frac{r}{2}$ .  $z - \bar{z} = r$ ,  $z\bar{z} = r^2$

由题设  $|z-1|^2 = |z| \cdot |z-2|$ ,

$$\text{即: } (z-1)(\bar{z}-1) = |z| \sqrt{(z-2)(\bar{z}-2)}$$

$$\therefore r^2 - r + 1 = r \sqrt{r^2 - 2r + 4},$$

整理得  $r^2 + 2r - 1 = 0$ .

$$\text{解得 } r = \sqrt{2} - 1,$$

$$r = -\sqrt{2} - 1 \text{ (舍去).}$$

$$\text{即 } |z| = \sqrt{2} - 1.$$

19. (12分) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=1$ ,  $a_n=3^{n-1}+a_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ).

(I) 求  $a_2$ ,  $a_3$ ;

(II) 证明  $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ .

【解答】解：（I） $\because a_1=1$ ,

$$\therefore a_2=3+1=4,$$

$$\therefore a_3=3^2+4=13;$$

（II）证明：由已知  $a_n - a_{n-1} = 3^{n-1}$ ,  $n \geq 2$

$$\text{故 } a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1$$

$$= 3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3 + 1 = \frac{3^n - 1}{2}, \quad n \geq 2$$

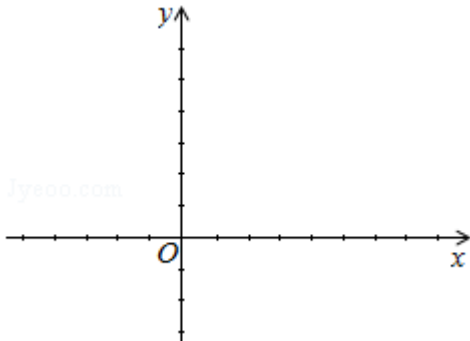
当  $n=1$  时, 也满足上式.

所以 
$$a_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

20. (12分) 已知函数  $f(x) = 2\sin x (\sin x + \cos x)$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的最小正周期和最大值;

(2) 在给出的直角坐标系中, 画出函数  $y=f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上的图象.

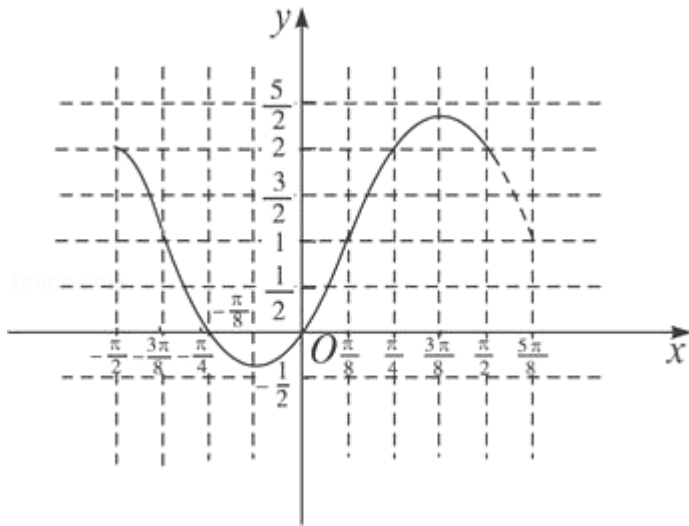


【解答】解：（1） $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x \cos x = 1 - \cos 2x + \sin 2x$

$$= 1 + \sqrt{2}(\sin 2x \cos \frac{\pi}{4} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{4})$$

$$= 1 + \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$$

所以函数的最小正周期为  $\pi$ , 最大值为  $1 + \sqrt{2}$ ;



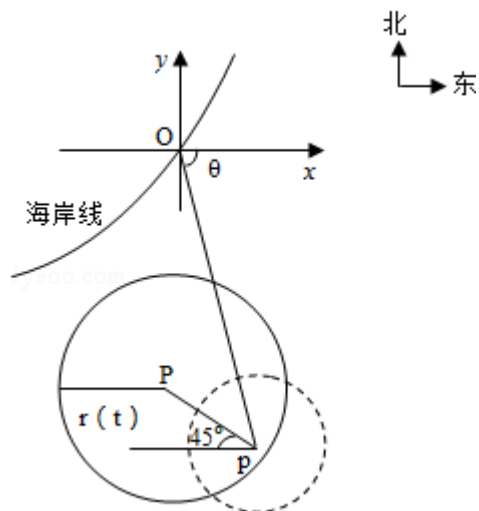
(2) 由 (1) 列表得:

$x$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$
$y$	1	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	1

故函数  $y=f(x)$  在区间  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上的图象是:

21. (12分) 在某海滨城市附近海面有一台风, 据监测, 当前台风中心位于城市  $O$  (如图)

的东偏南  $\theta$  ( $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ) 方向  $300\text{km}$  的海面  $P$  处, 并以  $20\text{km/h}$  的速度向西偏北  $45^\circ$  方向移动, 台风侵袭的范围为圆形区域, 当前半径为  $60\text{km}$ , 并以  $10\text{km/h}$  的速度不断增大, 问几小时后该城市开始受到台风的侵袭?



**【解答】**解: 如图建立坐标系: 以  $O$  为原点, 正东方向为  $x$  轴正向.

在时刻:  $t$  ( $h$ ) 台风中心  $P(x, y)$  的坐标为

$$\begin{cases} x = 300 \times \frac{\sqrt{2}}{10} - 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} t \\ y = -300 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} t. \end{cases}$$

令  $(x', y')$  是台风边缘线上一点, 则此时台风侵袭的区域是  $(x' - x)^2 + (y' - y)^2 \leq [r(t)]^2$ ,

其中  $r(t) = 10t + 60$ ,

若在  $t$  时, 该城市受到台风的侵袭,

则有  $(0 - x)^2 + (0 - y)^2 \leq (10t + 60)^2$ ,

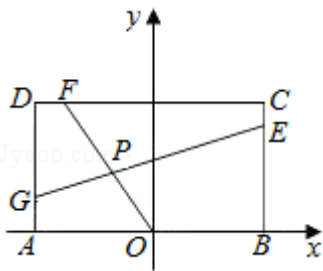
即  $(300 \times \frac{\sqrt{2}}{10} - 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} t)^2 + (-300 \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} t)^2 \leq (10t + 60)^2$ ,

即  $t^2 - 36t + 288 \leq 0$ , 解得  $12 \leq t \leq 24$ .

答: 12 小时后该城市开始受到台风侵袭.

22. (14 分) 已知常数  $a > 0$ , 在矩形  $ABCD$  中,  $AB = 4$ ,  $BC = 4a$ ,  $O$  为  $AB$  的中点, 点  $E, F, G$

分别在  $BC, CD, DA$  上移动, 且  $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA}$ ,  $P$  为  $GE$  与  $OF$  的交点 (如图), 问是否存在两个定点, 使  $P$  到这两点的距离的和为定值? 若存在, 求出这两点的坐标及此定值; 若不存在, 请说明理由.



**【解答】**解: 根据题设条件, 首先求出点  $P$  坐标满足的方程, 据此再判断是否存在两定点, 使得点  $P$  到定点距离的和为定值. 按题意有  $A(-2, 0)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(2, 4a)$ ,  $D(-2, 4a)$

设  $\frac{BE}{BC} = \frac{CF}{CD} = \frac{DG}{DA} = k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ),

由此有  $E(2, 4ak)$ ,  $F(2 - 4k, 4a)$ ,  $G(-2, 4a - 4ak)$ .

直线  $OF$  的方程为:  $2ax + (2k - 1)y = 0$ , ①

直线  $GE$  的方程为:  $-a(2k - 1)x + y - 2a = 0$ . ②

从①, ②消去参数  $k$ ,

得点  $P(x, y)$  坐标满足方程  $2a^2x^2 + y^2 - 2ay = 0$ ,

整理得  $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(y-a)^2}{a^2} = 1$ .

当  $a^2 = \frac{1}{2}$  时, 点  $P$  的轨迹为圆弧, 所以不存在符合题意的两点;

当  $a^2 \neq \frac{1}{2}$  时, 点  $P$  轨迹为椭圆的一部分, 点  $P$  到该椭圆焦点的距离的和为定长;

当  $a^2 < \frac{1}{2}$  时, 点  $P$  到椭圆两个焦点  $(-\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}, a), (\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}, a)$  的距离之和为定值  $\sqrt{2}$ ;

当  $a^2 > \frac{1}{2}$  时, 点  $P$  到椭圆两个焦点  $(0, a - \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}}), (0, a + \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}})$  的距离之和为定值  $2a$ .